36 - نريد مقارنة الطرق المختلفة للتوفير بفائدة مركبة لذلك نودع مبلغ 10.000 DA في بنك بنسبة سنوية 5 % خلال 5 سنوات.

1) كم يصبح رصيده خلال هذه المدة ؟

2- أ) إذا كان الرصيد يزيد كل ستة أشهر بنسبة سنوية x' احسب x' ثم حدد رصيده خلال نفس الفترة.

ب) أجب عن السؤال (أ) من أجل تدخير ثلاثي الأشهر، شهري ، يومي.

مع العلم أنه إذا كانت x هي النسبة المئوية السنوية فإن النسبة الشهرية المكافئة لها هي x'' حيث $(1+x'')^{12}=1+x$

الدرس 5

الدَّالةُ اللوّغارِيتميَةُ النّيبرِيَةُ

تمهيد

- رأينا في درس الدالة الأسية أن المعادلة $e^x = m$ مع $m \rangle 0$ لها حل وحيد على $\mathbb{R}$، هذا الحل رمزنا له بـ $Ln(m)$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m ، العدد $Ln(m)$ يمثل العدد الحقيقي الذي صورته m بالدالة exp عندئذ نستطيع أن نعرف على المجال $]0\ ,\ +\infty[$ الدالة $m \mapsto Ln(m)$ التي نرمز لها بصفة عامة $x \mapsto Ln(x)$.
و التي تسمى بالدالة اللوغاريتمية النيبرية و نرمز لها بـ Ln .

$\exp(y)=x$ ⟷ (Ln) $y=Ln(x)$

- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة العكسية للدالة exp و العكس صحيح.

1 - الدالة اللوغاريتمية النيبرية

1 - 1 تعريف

- نسمي لوغاريتم نيبري لعدد حقيقي موجب تماما m ، الحل الوحيد للمعادلة $e^a = m$ ذات المجهول a و نرمز لهذا الحل بالرمز $Ln(m)$ و يقرأ " اللوغاريتم النيبري لـ m ".

- الدالة اللوغاريتمية النيبرية هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $Ln(x)$ و نكتب $x \xrightarrow{Ln} Ln(x)$

نتيجة

1) من اجل كل عددين حقيقين موجبين تماما x و y لدينا :
$Ln(x) = y$ يكافئ $x = e^{y}$
2) $e^{0} = 1$ يكافئ $Ln(1) = 0$ و $e^{1} = e$ يكافئ $Ln(e) = 1$
3) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $Ln(e^{x}) = x$
و من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $\exp(Ln(x)) = x$

1 - 2 خواص

1) الدالة Ln معرفة و مستمرة على $]0, +\infty[$
2) الدالة Ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و لدينا $Ln'(x) = \frac{1}{x}$ و $Ln(1+h) \approx h$ لما يكون h بجوار الصفر.
3) الدالة Ln متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ و منه نستنتج ما يلي
$1 \rangle x \rangle 0$ يكافئ $Ln(x) \langle 0$
$x \rangle 1$ يكافئ $Ln(x) \rangle 0$

من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b :
$a = b$ يكافئ $Ln(a) = Ln(b)$
$a \langle b$ يكافئ $Ln(a) \langle Ln(b)$

الإثبات

1) تقبل ان الدالة Ln مستمرة على $]0, +\infty[$
2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند العدد a اذا و فقط إذا كانت نهاية النسبة $\frac{Ln(x) - Ln(a)}{x - a}$ لما x يؤول إلى a تساوي عدد حقيقي.

نضع $t(x) = \frac{Ln(x) - Ln(a)}{x - a}$ مع $x \neq a$.

نضع $Ln(x) = X$ و $Ln(a) = A$ و عليه لما $x \to a$ فإن $X \to Ln(a) = A$.

$$\lim_{x \to a} t(x) = \lim_{x \to a} \frac{Ln(x) - Ln(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{X \to A} \frac{X - A}{e^{X} - e^{A}} = \lim_{X \to A} \frac{1}{\frac{e^{X} - e^{A}}{X - A}} = \frac{1}{e^{A}} = \frac{1}{a}$$

إذن الدالة Ln قابلة للاشتقاق عند a و عددها المشتق هو $\frac{1}{a}$

و عليه من اجل كل $x \rangle 0$ يكون $Ln'(x) = \frac{1}{x}$

$Ln(1+h) \approx Ln(1) + h \times Ln'(1) \approx h$

لأن $Ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ و $Ln(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $Ln'(x)$	‖	+	+
تغيرات Ln	‖	↗	↗

3) بما انه من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $\frac{1}{x} \rangle 0$
فإن الدالة Ln متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.
بما ان $Ln(1) = 0$ فإن من اجل $x \in]0,1[$ يكون $Ln(x) \langle 0$
و من اجل $x \rangle 1$ يكون $Ln(x) \rangle 0$

تمرين تدريبي 1

عين في كل حالة من الحالات التالية المجموعة التي ينتمي إليها x بحيث العبارات المعطاة ذات معنى .

أ) $Ln(-x)$ ، ب) $Ln(x^{2})$ ، جـ) $Ln(x-2)$

د) $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ، هـ) $Ln|x+1|$ ، و) $Ln|x^{2} - 3x + 2|$

✓ الحل

بما ان الدالة Ln معرفة على $]0, +\infty[$ فإن إلا الأعداد الموجبة تماما التي لها لوغاريتم.

أ) العبارة $Ln(-x)$ لها معنى إذا و فقط إذا $-x \rangle 0$ اي $x \langle 0$.

ب) العبارة $Ln(x^{2})$ لها معنى اذا و فقط إذا كان $x^{2} \rangle 0$ اي $x \neq 0$ و عليه $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

جـ) العبارة $Ln(x-2)$ لها معنى اذا وفقط إذا كان $x - 2 \rangle 0$ اي $x \rangle 2$ و عليه $x \in]2, +\infty[$.

د) العبارة $Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $\frac{x}{x+1} \rangle 0$ و $x + 1 \neq 0$
اي $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

هـ) العبارة $Ln|x+1|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x+1| \rangle 0$
اي $x + 1 \neq 0$
و هذا يعني ان $x \neq -1$ و منه $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

و) العبارة $Ln|x^{2} - 3x + 2|$ لها معنى إذا و فقط إذا كان $|x^{2} - 3x + 2| \rangle 0$
اي $x^{2} - 3x + 2 \neq 0$

يكافئ: $x^2-3x+2\neq 0$

$(x\neq 2)$ و $(x\neq 1)$

و منه مجموعة قيم x المطلوبة هي

$\mathbb{R}-\{1,2\}$

تمرين تدريبي 2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $Ln(x^2+2)=Ln(3x)$ ، 2) $Ln(x^2+2)\geq Ln(3x)$

3) $3(Ln(x))^2-2Ln(x)-1=0$ ، 4) $3e^{2x}-2e^x-1=0$

✓ الحل

- لحل المعادلة $LnV(x)=Ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $V(x)=U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E.
- لحل المتراجحة $LnV(x)\leq Ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x)\rangle 0$ و $V(x)\rangle 0$ ثم نحل المتراجحة $V(x)\leq U(x)$ و لا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E.

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^2+2\rangle 0$

$3x\rangle 0$ يكافئ $x\rangle 0$ و منه المجموعة E هي $]0,+\infty[$

نضع $V(x)=x^2+2$ و $U(x)=3x$

$V(x)=U(x)$ يكافئ $x^2-3x+2=0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=2)$

بما أن 1 و 2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{1,2\}$.

2) المجموعة E هي $]0,+\infty[$.

$V(x)\geq U(x)$ يكافئ $x^2-3x+2\geq 0$

لكي يكون $x^2-3x+2\geq 0$ يجب ان يكون $x\in]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$ و منه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي:

$$S=(]0,+\infty[)\cap(]-\infty,1]\cup[2,+\infty[)=]0,1]\cup[2,+\infty[$$

3) $3(Ln x)^2-2Ln(x)-1=0$ ... (*)

المجموعة المرجعية E هي $]0,+\infty[$.

بوضع $Ln(x)=X$ المعادلة (*) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلين هما 1 و $-\frac{1}{3}$

$Ln(x)=1$ يكافئ $x=e$

$Ln(x)=-\frac{1}{3}$ يكافئ $x=e^{-\frac{1}{3}}$

بما ان e و $e^{-\frac{1}{3}}$ ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $S=\left\{e, e^{-\frac{1}{3}}\right\}$

4) المجموعة المرجعية E للمعادلة $3e^{2x}-2e^x-1=0$ هي $\mathbb{R}$.

بوضع $e^x=X$ فإن المعادلة (4) تصبح $3X^2-2X-1=0$ و هذه الأخيرة لها حلان 1 و $-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $X\rangle 0$ و الحل 1 مقبول.

$e^x=1$ يكافئ $x=Ln(1)=0$.

لذن مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S=\{0\}$.

2 - الخاصية الأساسية و نتائجها

2 - 1 الخاصية الأساسية

من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b يكون $Ln(a\times b)=Ln(a)+Ln(b)$

الإثبات

لدينا $e^{Ln(a\times b)}=a\times b$ .... (1)

$e^{Ln(a)+Ln(b)}=e^{Ln(a)}\times e^{Ln(b)}=a\times b$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $e^{Ln(ab)}=e^{Ln(a)+Ln(b)}$ و بما ان الدالة exp تقابل فإنه ينتج $Ln(ab)=Ln(a)+Ln(b)$.

2 - 2 نتائج

من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:

1) $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$ ، 2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right)=Ln(a)-Ln(b)$ ، 3) $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$

4) $Ln(a^{-n})=-n\,Ln(a)$ ، 5) $Ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}Ln(a)$

الإثبات

1) $Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(b)+Ln\left(\frac{1}{b}\right)$ .... (1)

$Ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=Ln(1)=0$ .... (2)

من (1) و (2) نجد $Ln\left(\frac{1}{b}\right)=-Ln(b)$

2) $Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = Ln(a)+Ln\left(\frac{1}{b}\right)$
$= Ln(a)-Ln(b)$

3) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n :

نسمي P_n الخاصية " $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$ "

P_1 صحيحة لأن $Ln(a^1)=Ln(a)$

نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي n اي $Ln(a^n)=n\,Ln(a)$

و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $Ln(a^{n+1})=(n+1)Ln(a)$

$$Ln(a^{n+1}) = Ln(a^n\times a^1) = Ln(a^n)+Ln(a) = n\,Ln(a)+Ln(a) = (n+1)Ln(a)$$

منه "P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

4) $Ln(a^{-n})=Ln\left(\frac{1}{a^n}\right)$
$= -Ln(a^n)=-n\,Ln(a)$

5) لدينا $(\sqrt[n]{a})^n=a$ ومنه ينتج $Ln\left((\sqrt[n]{a})^n\right)=Ln(a)$ و بتطبيق نتيجة (3) نجد

$n\,Ln(\sqrt[n]{a})=Ln(a)$ بقسمة طرفي هذه المساواة على n نجد $Ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}Ln(a)$

ملاحظة

إذا كان a و b عددين حقيقيين سالبين تماما فإن $ab\rangle 0$ و بالتالي نكتب
$ab=|ab|=|a||b|$ و $Ln(ab)=Ln(|a|)+Ln(|b|)$

مبرهنة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بحيث $f(ab)=f(a)+f(b)$ فإن الدالة f هي من الشكل $k.Ln$

و إذا أضيف الشرط $f(e)=1$ فإن f هي الدالة Ln

الإثبات

- لدينا $f(a\times 1)=f(a)+f(1)$ منه نجد $f(1)=0$
- لنعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=f(ax)-f(x)$ مع $a\rangle 0$

من اجل كل $x\rangle 0$ لدينا $g(x)=f(a)+f(x)-f(x)=f(a)$.

إذن الدالة g ثابتة.

و بما ان g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $g'(x)=af'(ax)-f'(x)$ و $g'(x)=0$

ينتج $af'(ax)=f'(x)$.

من اجل $x=1$ نجد $af'(a)=f'(1)$

و إذا وضعنا $f'(1)=k$ فإن $f'(a)=\frac{k}{a}$

إذن من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $f'(x)=\frac{k}{x}$.

- نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x)=f(x)-k\,Ln(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{k}{x}=\frac{k}{x}-\frac{k}{x}=0$

إذن الدالة h ثابتة على المجال $]0,+\infty[$

و من اجل كل $x\rangle 0$ لدينا $h(x)=h(1)=f(1)=0$ إذن $f(x)=k\,Ln(x)$.

بما ان $f(e)=k\,Ln(e)=k$ و $f(e)=1$ فإن $k=1$ و بالتالي $f(x)=Ln(x)$.

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية $A=Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)$

$B=Ln(\sqrt{2}+1)^3+Ln(\sqrt{2}-1)^3$ ، $C=Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})-Ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

✓ الحل

$$A=Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)=Ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=Ln\left((\sqrt{2})^2-1^2\right)=Ln(1)=0$$

$$B=3Ln(\sqrt{2}+1)+3Ln(\sqrt{2}-1)=3\left(Ln(\sqrt{2}+1)+Ln(\sqrt{2}-1)\right)=3A=0$$

$$C=Ln\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{1}\right)=2Ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات و المتراجحات التالية في $\mathbb{R}$

1) $Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$ ، 2) $Ln(x+4)+Ln(x+2)=Ln(8)$

3) $Ln(x+4)+Ln(x+2)\le Ln(8)$ ، 4) $Ln(x+4)(x+2)\le Ln(8)$

✓ الحل

لحل معادلات (متراجحات) يظهر فيها اللوغاريتم نبحث اولا عن المجموعة E مجموعة تعريف المعادلة (المتراجحة) ثم نكتب المعادلة المعطاة على الشكل $Ln(V(x))=Ln(U(x))$ (المتراجحة المعطاة على الشكل $Ln(V(x))\le Ln(U(x))$)

1) x لا يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$
أي $x \in]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ و منه $E=]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$.
$Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$ يكافئ $(x+4)(x+2)=(8)$ يكافئ $x^2+6x=0$
و حلا المعادلة $x^2+6x=0$ هما $(x=0)$ و $(x=-6)$
بما أن 0 و -6 ينتميان إلى E فإن مجموعة الحلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0,-6\}$.

2) x لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $x+4>0$ و $x+2>0$ أي $x>-4$ و $x>-2$ و منه $E=]-2,+\infty[$. و تكتب في E على الشكل $Ln(x+4)(x+2)=Ln(8)$ ...*.
حل المعادلة (*) يؤول إلى حل المعادلة $(x+4)(x+2)=8$
$(x+4)(x+2)=8$ يكافئ $x=0$ أو $x=-6$ و -6 لا ينتمي إلى E
و بالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S=\{0\}$

3) المجموعة المرجعية E هي $E=]-2,+\infty[$.
المتراجحة المقترحة تكتب في E على الشكل * ... $Ln(x+4)(x+2)\leq Ln(8)$
حل المتراجحة (*) يؤول إلى حل المتراجحة $(x+4)(x+2)\leq 8$
$(x+4)(x+2)\leq 8$ يكافئ $x\in]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S=E\cap]-6,0[=]-2,0[$

4) x لا يكون حلا للمتراجحة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$ أي $x\in]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$ ومنه $E=]-\infty,-4[\cup]-2,+\infty[$.
المتراجحة المقترحة تكتب في E على شكل $(x+4)(x+2)\leq 8$ أي $x^2+6x\leq 0$
$x^2+6x\leq 0$ يكافئ $x\in]-6,0[$
و منه مجموعة حلول المتراجحة المقترحة هي $S=E\cap]-6,0[=]-6,-4[\cup]-2,0[$

3 دراسة الدالة Ln

3-1 حساب النهايات عند $(+\infty)$ و 0

مبرهنة

1) $\lim_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ ، 2) $\lim_{x\to 0} Ln(x)=-\infty$

الإثبات

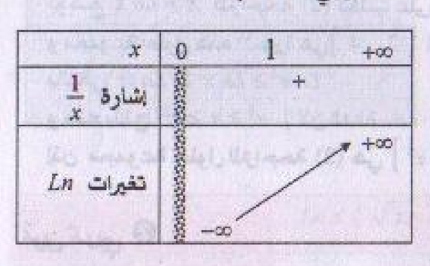
الطريقة الأولى

بوضع $Ln\,x=y$ نجد $x=e^y$.
بما أن x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن e^y يؤول إلى $(+\infty)$ و لكي يؤول e^y إلى $(+\infty)$ يجب أن يؤول y إلى $(+\infty)$ إذن $\lim_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$.

الطريقة الثانية

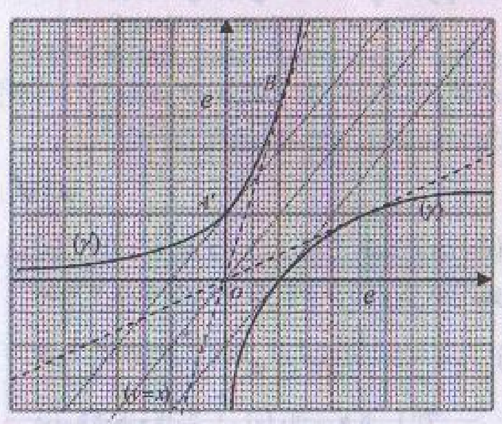
لإثبات أن $\lim_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ يجب أن نبين من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد على الأقل عدد حقيقي β بحيث إذا كان $x>\beta$ يكون $Ln\,x>A$.
بما أن الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $Ln\,x>A$ يكافئ $x>e^A$
إذن من أجل كل عدد حقيقي تماما A يوجد عدد حقيقي $\beta=e^A$
بحيث إذا كان $x>\beta$ يكون $Ln\,x>A$.

2) من أجل كل $x>0$ نضع $X=\frac{1}{x}$
ومنه نجد $Ln\,x=-Ln\,X$
$\lim_{x\to 0} Ln\,x=\lim_{X\to+\infty} -Ln\,X=-\infty$



x	0	1	$+\infty$
إشارة $\frac{1}{x}$	‖	+	
تغيرات Ln	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3-2 التمثيل البياني للدالة Ln



مبرهنة

المنحنيان الممثلان للدالتين Ln و exp متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس.

- (γ') له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$ إذن (γ) له مستقيم مقارب معادلته $x=0$ بجوار 0
- المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مماس لـ (γ') عند النقطة $A'(0,1)$ و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,0)$.

تمرين تدريبي 1



حل المعادلة و المتراجحة التاليتين
1) $(Ln\,x)^2-3(Ln\,x)+2=0$ ، 2) $(Ln\,x-2)(Ln(x)-4)\leq 0$

✓ الحل

1) المجموعة المرجعية للمعادلة (1) هي $E=]0,+\infty[$.
بوضع $X=Ln\,x$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2-3X+2=0$
و حلول هذه الأخيرة هي 1 و 2

$Ln\,x=1$ يكافئ $x=e^1=e$

$Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

و بما ان e و e^2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S=\{e\ ,\ e^2\}$.

2) المجموعة المرجعية للمتراجحة (2) هي $E=]0,+\infty[$.

بوضع $X=Ln\,x$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-2)(X-4)\le 0$

و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $[2\ ,\ 4]$ اي $2\le X\le 4$ لكن $Ln\,e^4=4$ و $Ln\,e^2=2$

بالتالي $Ln\,e^4\ge Ln\,x\ge Ln\,e^2$

و منه ينتج $e^4\ge x\ge e^2$ (لأن الدالة Ln متزايدة تماما)

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S=[e^2,e^4]$.



تمرين تدريبي 2

(γ) المنحني البياني للدالة Ln في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.
C نقطة منه فاصلتها a مع $a>0$.

1) اكتب بدلالة a معادلة المماس (Ta) للمنحني (γ) عند النقطة C
2) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $a>0$ ان المماس (Ta) يقع فوق (γ).
3) استنتج انه من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\le x-1$

الحل

1) (Ta) : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ حيث $f(x)=Ln\,x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}$

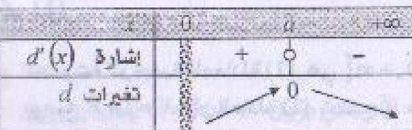
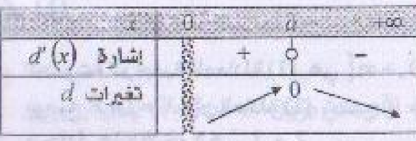
إذن $f'(a)=\frac{1}{a}$ و بالتالي $y=\frac{1}{a}(x-a)+Ln\,a$ ؛ (T_a)

2) دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T_a).

لدراسة الوضع النسبي للمنحني (γ) بالنسبة الى المماس (T_a) ندرس إشارة المقدار $d(x)=Ln\,x-\left(\frac{x}{a}-1+Ln\,a\right)$ ومن اجل ذلك ندرس الدالة d.

الدالة d قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x>0$

لدينا $d'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax}$.

x	0	a	$+\infty$
إشارة $d'(x)$	+	0	-
تغيرات d	↗	0	↘

نلاحظ من الجدول ان من اجل كل $x\ne a$ لدينا $d(x)<0$.

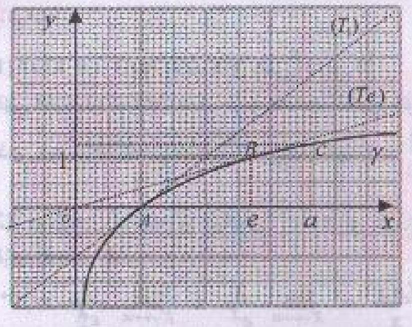
إذن المنحني (γ) يقع تحت المماس (Ta)



و عليه من اجل كل $x>0$ يكون

$$Ln\,x\le Ln\,a+\frac{x-a}{a}$$

3) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,0)$ و بالتالي المنحني (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) اي من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $Ln\,x\le x-1$.



تمرين تدريبي 3

بين انه من اجل كل $x>0$ يكون $Ln\,x<\sqrt{x}$

الحل

الطريقة المناسبة للبرهان على أن $Ln\,x<\sqrt{x}$ من اجل كل $x>0$ هي دراسة تغيرات الدالة f المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln\,x-\sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2-\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=4$

$2-\sqrt{x}\ge 0$ يكافئ $x\le 4$

$2-\sqrt{x}\le 0$ يكافئ $x\ge 4$

بما ان $2{,}718<e<2{,}719$ فإن $e^2>4$ و بالتالي $Ln\,e^2>Ln\,4$ اي $Ln(4)-2<0$

x	0	4	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات f	↗	$Ln(4)-2$	↘

إذن من اجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $f(x)<0$ و بالتالي $Ln\,x-\sqrt{x}<0$ اي $Ln\,x<\sqrt{x}$.

4 نهايات شهيرة

مبرهنة

1) $\lim_{h\to 0}\frac{Ln(1+h)}{h}=1$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\overset{+}{0}$ ، 3) $\lim_{x\to 0^{+}}x\,Ln\,x=\overset{-}{0}$

الإثبات

1) الدالة Ln قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

فهي قابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق هو $Ln'(1)=1$

إذن $\lim_{h\to0}\frac{Ln(1+h)-Ln(1)}{h}=1$ أي $\lim_{h\to0}\frac{Ln(1+h)}{h}=1$

2) بوضع $X=Ln(x)$ يكون $x=e^X$ و لما $x\to+\infty$ فإن $X\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0^+$$

3) بوضع $X=\frac{1}{x}$ يكون $x\,Ln\,x=-\frac{Ln\,X}{X}$

ولما x يؤول إلى الصفر بقيم أكبر فإن X يؤول إلى $+\infty$

وعليه $\lim_{x\to0^+} x\,Ln\,x=\lim_{X\to+\infty}-\frac{Ln\,X}{X}=0^-$

ملاحظة

بوضع $x=X-1$ العبارة $\frac{Ln(1+x)}{x}$ تكتب $\frac{Ln\,X}{X-1}$

و عليه $\lim_{X\to1}\frac{Ln\,X}{X-1}=\lim_{x\to0}\frac{Ln(x+1)}{x}=1$

التفسير الهندسي والتحليلي للنهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$

- إذا كانت M نقطة كيفية من التمثيل البياني للدالة Ln فإن إحداثياتها $(x, Ln\,x)$.
المستقيم (OM) معامل توجيهه $\frac{Ln\,x}{x}$ و عليه لما x يأخذ قيما كبيرة جدا، فإن المستقيم (OM) يقترب أكثر فأكثر من محور الفواصل، حينئذ نستطيع القول أن المنحني البياني (γ) للدالة Ln لا يقبل مستقيما مقاربا مائلا.
- المسافة العمودية بين (γ) و محور الفواصل تتزايد ببطئ شديد كلما اخذ x قيما كبيرة جدا و هذا يجعلنا نرى أن المنحني (γ) على شكل قطع مستقيمة موازية لـ $(x'x)$. على مجال من الشكل $[a,b]$ حيث a و b كبيرتان جدا .
- النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ تسمح لنا بمقارنة x و $Ln\,x$ من أجل قيم كبرى لـ x .
نقول أن x تتفوق على $Ln\,x$ بجوار $(+\infty)$.

تمرن تدريبي 1

احسب النهايات التالية

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+Ln\,x\right)$ ، 2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x\,Ln\,x}$ ، 3) $\lim_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)$

4) $\lim_{x\to+\infty} Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ ، 5) $\lim_{x\to+\infty} x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

الحل

1) بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$

فإنه حسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+Ln\,x\right)=+\infty$

2) بما أن $\lim_{x\to0} x\,Ln\,x=0^-$ فإن $\lim_{x\to0}\frac{1}{x\,Ln\,x}=-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln\,x=+\infty$ وعليه $\lim_{x\to+\infty}(x-Ln\,x)=+\infty-\infty$

من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=x\left(1-\frac{Ln\,x}{x}\right)$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

4) $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

و منه نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

نبحث عن كتابة أخرى لـ $f(x)=Ln(2x+1)-Ln(x-1)$ بحيث تظهر النهايات الشهيرة.

ومن أجل كل $x>1$ يكون $f(x)=Ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$

لكن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$ إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=Ln\,2$

5) $\lim_{x\to+\infty}Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

و منه نحصل على عدم التعيين من الشكل $0\times\infty$ بوضع $X=-\frac{1}{x}$ فإن العبارة $x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ تصبح $-\frac{Ln(1+X)}{X}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{X\to0}-\frac{Ln(1+X)}{X}=-1$

تمرين تدريبي . 2

باعتبار انه من اجل كل $x \rangle 0$ و $a \rangle 0$ لدينا $Ln\, x \leq Ln\, a + \frac{x-a}{a}$ .... *

1) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي $a \rangle 0$ يكون ، $Ln(a+1) - Ln(a) \leq \frac{1}{a}$

2) ما هو شكل المنحني (γ) في المجال $[100, 101]$ ؟

الحل ✓

1) بوضع $x = a+1$ في المتباينة (*) نجد $Ln(a+1) \leq Ln\, a + \frac{a+1-a}{a}$

اي $Ln(a+1) - Ln\, a \leq \frac{1}{a}$ .... (**)

2) بوضع $a = 100$ في العلاقة (**) نجد $Ln\, 101 - Ln\, 100 \leq \frac{1}{10^2}$ و منه نستنتج ان النقطتين $A(100 , Ln100)$ و $B(101 , Ln101)$ لهما نفس الترتيب تقريبا و هذا مما يفسر ان (γ) في المجال $[100, 101]$ على شكل قطعة مستقيمة موازية لـ (xx') .

5 . اللوغاريتم العشري

5 - 1 تعريف

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على $]0, +\infty[$

بـ $Log\, x = \frac{Ln\, x}{Ln\, 10}$ مع $Log\, 10 = 1$ و $Log\, 1 = 0$.

5 - 2 خواص

1) الدالة Log معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

2) الدالة Log متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ لأن $Ln\, 10 \rangle 0$.

3) الدالة Log لها نفس الخواص الجبرية للدالة Ln .

و بصفة خاصة انه من اجل كل عددين حقيقين a و b و من اجل كل عدد طبيعي كيفي p ؛

$Log\, a\, b = Log\, a + Log\, b$ و $Log\, a^p = p\, Log\, a$ و $Log\, 10^p = p$.

4) من أجل كل عدد حقيقي A موجب تماما لدينا

$10^{n+1} \rangle A \geq 10^n$ يكافيء $n+1 \rangle Log\, A \geq n$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ (γ)

تمرين تدريبي

باعتبار ان عددا A يحقق $10^{n+1} \rangle A \geq 10^n$ حيث n عدد طبيعي.

1) ما هو عدد ارقام جزئه الصحيح ؟

ثم استنتج حصرا للعدد $Log\, A$ معينا الجزء الصحيح لـ $Log\, A$.

2) إذا علمت ان $Log\, A = 5{,}52$ ما هو عدد ارقام جزئه الصحيح لـ A و $\sqrt{A}$ و A^{100} ؟

الحل ✓

1) عدد يتألف من رقمين يكون محصورا بين 10 و 100 ، و آخر يتألف من ثلاثة ارقام يكون محصورا بين 100 و 1000 و بشكل عام فإن العدد المحصور بين 10^n و 10^{n+1} عدد ارقامه $(n+1)$

$10^{n+1} \rangle A \geq 10^n$ يكافيء $n+1 \rangle Log\, A \geq n$ و بالتالي الجزء الصحيح لـ $Log\, A$ هو n .

2) - نعلم ان $6 \rangle Log\, A \geq 5$ و منه ينتج $10^6 \rangle A \geq 10^5$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح للعدد A هو 6

- لدينا $Log\sqrt{A} = \frac{1}{2} Log\, A = 2{,}760$ و منه ينتج $10^3 \rangle \sqrt{A} \geq 10^2$

و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ $\sqrt{A}$ هو 3

- لدينا $Log\, A^{100} = 100\, Log\, A = 552$ و عليه يكون $553 \rangle Log\, A^{100} \geq 552$

ومنه ينتج $10^{553} \rangle A^{100} \geq 10^{552}$ و بالتالي عدد ارقام الجزء الصحيح لـ A^{100} هو 553 .

6 . الدالة المركبة مع الدالة Ln

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال I و لنعتبر الدالة g المعرفة بـ $g = Ln\, o\, U$

مبرهنة

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على I و من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

وإشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $U'(x)$.

الإثبات

- من اجل كل x من I لدينا $g'(x) = (Ln\; u(x))' = U'(x) \times L'n(U(x))$

وبما انه من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $L'n(x) = \frac{1}{x}$ فإن $L'n(U(x)) = \frac{1}{U(x)}$

لأن $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

- بما ان $U(x) \rangle 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $U'(x)$.

نتيجة

الدالة المشتقة للدالة $x \to Ln\,|U(x)|$ هي الدالة $x \to \frac{U'(x)}{U(x)}$

خواص

1) الدالتان U و $Ln\,o\,U$ لهما نفس اتجاه التغير على I .

2) في كل ما يلي تعتبر (*) إما عدد a أو $+\infty$ أو $-\infty$.

- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=+\infty$.
- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=0$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=-\infty$.
- إذا كان $\lim_{x\to *} U(x)=b$ فإن $\lim_{x\to *} Ln(U(x))=Ln(b)$ بحيث $b>0$.

تمرين تدريبي 1

ادرس تغيرات الدالة g المعرفة بالعبارة $g(x)=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

الحل

- الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1}>0$

أي $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$ ومنه $D_g=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$.

- الدالة g معرفة وقابلة الاشتقاق على D_g لأنها مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على D_g هما :

$x \xrightarrow{U} \frac{x}{x+1}$ و $x \xrightarrow{f} Ln(x)$,

ومن أجل كل x من D_g لدينا $g'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

ومن أجل كل x من D_g يكون $g'(x)>0$

ومنه g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]0,+\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	‖	‖	+
تغيرات g	0 ↗ $+\infty$	‖	‖	$-\infty$ ↗ 0

- بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$ فإن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=Ln(1)=0$
- بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=Ln(1)=0$
- بما أن $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=0^+$ فإن $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$

- بما أن $\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to -1} g(x)=+\infty$

$x=0$ و $x=-1$ و $y=0$ مستقيمات مقاربة لـ (C_g)

تمرين تدريبي 2

1) بدراسة تغيرات الدالة $x \xrightarrow{f} Ln\,x+1-x$ على المجال $]0,+\infty[$ بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون $Ln\,x\le x-1$ ... (I)

2) باستعمال المتباينة (1)

أ) بين أنه من أجل كل $t>-1$ يكون $Ln(1+t)\le t$

ب) بوضع $x=\frac{1}{1+t}$ بين أنه من أجل كل $t>-1$ يكون $\frac{t}{t+1}\le Ln(1+t)$.

ثم استنتج حصرا للعدد $Ln(1+x)$ من أجل كل $x>-1$

3) بوضع $x=\frac{1}{p}$ مع p عدد طبيعي غير معدوم .

أ) بين أن $\frac{1}{p+1}\le Ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$

ب) (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}$

- بين أن $U_n\le Ln(2)\le U_n+\frac{1}{2n}$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة نحو $Ln(2)$.
- اعط حصرا $Ln(2)$ من أجل $n=5$.

الحل

1) الدالة f معرفة وقابلة الاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$ يكافىء $x=1$

- إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$.

إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0,1[$.

- $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x}+\frac{1-x}{x}\right)=-\infty$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖ +	0	−
تغيرات f	‖ $-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

نلاحظ من جدول تغيرات f أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما. لدينا

$f(x) \le 0$ أي $Ln(x) \le x - 1$

2) أ) لدينا $Ln(x) \le -1+x$ .... (i)

بوضع $x=1+t$ في العبارة (i) نجد $Ln(1+t) \le -1+(1+t)$

أي $Ln(1+t) \le t$ .... (*)

ب) بوضع $x=\frac{1}{1+t}$ في العبارة (i) نجد $Ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \le -1+\frac{1}{1+t}$

بالتبسيط $Ln(1+t) \ge \frac{t}{1+t}$ ..... (**)

من (*) و (**) نجد $\frac{t}{1+t} \le Ln(1+t) \le t$ ... (I)

اذن من اجل كل عدد حقيقي $x \rangle -1$ لدينا $\frac{x}{1+x} \le Ln(1+x) \le x$

3) أ) بوضع $x=\frac{1}{p}$ في العبارة (I) نجد $\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} \le Ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

بالتبسيط نجد $\frac{1}{p+1} \le Ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

ب) من اجل $p=n$ لدينا $\frac{1}{n+1} \le Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

من اجل $p=n+1$ لدينا $\frac{1}{n+2} \le Ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \le \frac{1}{n+1}$

من اجل $p=n+2$ لدينا $\frac{1}{n+3} \le Ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \le \frac{1}{n+2}$,

$\vdots$

من اجل $p=2n-1$ لدينا $\frac{1}{2n} \le Ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \le \frac{1}{2n-1}$

بجمع أطراف التباينات طرفا إلى طرف وحسب خواص الدالة Ln نجد :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n} \le Ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times.....\times\frac{2n}{2n-1}\right) \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.....+\frac{1}{2n-1}$$

بالتبسيط نجد $U_n \le Ln\left(\frac{2n}{n}\right) \le U_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}$ اي $U_n \le Ln(2) \le U_n+\frac{1}{2n}$.

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \rangle 0$$

و منه نستنتج ان (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما ان $U_n \le Ln(2)$ فانه (U_n) محدودة من الأعلى وعليه فالمتتالية متقاربة نحو ℓ

بما ان $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ فانه حسب نظرية الحصر نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}U_n=Ln\,2$$

إذن $\lim_{n\to+\infty}U_n=Ln(2)$

- من اجل $n=5$ لدينا $U_5 \le Ln(2) \le U_5+\frac{1}{10}$

$U_5=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$ و منه $U_5=0{,}643$ و بالتالي $0{,}643 \le Ln(2) \le 0{,}743$

7 . دراسة الدالة $x \xrightarrow{f} a^x$ مع $a \rangle 0$ و $a \ne 1$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $a^x=e^{x\,Ln\,a}$

إذن $f_a(x)=e^{x\,Ln\,a}$ و تكتب ايضا $f_a(x)=e^{u(x)}$ حيث $U(x)=x\,Ln\,a$.

إذن f_a هي الدالة المركبة $exp\,OU$ التي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها ب $\exp_a$

7 - 1 اتجاه تغير f_a

مبرهنة

من اجل كل عدد حقيقي $a\rangle 0$ و $a \ne 1$ الدالة f_a المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f_a(x)=a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=(Ln\ a)a^x$

الإثبات

بما أن الدالة $x \xrightarrow{u} x\,Ln\,a$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة $f_a=\exp OU$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f_a'(x)=(\exp OU)'(x)=u'(x)\exp'(u(x))=Ln(a)\times e^{u(x)}=Ln(a)\times a^x$$

نتيجة

إشارة $f_a'(x)$ من إشارة $Ln(a)$ لأن $a^x \rangle 0$

- إذا كان $a \rangle 1$ فإن $f_a'(x) \rangle 0$ ومنه f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- إذا كان $1 \rangle a \rangle 0$ فإن $f_a'(x) \langle 0$ ومنه f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

مثال .

$(2^x)'=Ln(2)\times 2^x$ ، $\left((\sqrt{2})^x\right)'=Ln(\sqrt{2})\times(\sqrt{2})^x$

7 - 2 نهاية f_a عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

بما ان $a^x = e^{x\,Ln(a)}$ و بما ان $Ln(a)$ يغير إشارته في جوار 1 فإننا نميز حالتين بالنسبة إلى a :

- الحالة الأولى $0 < a < 1$

بما ان $0 < a < 1$ فإن $Ln(a) < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

- الحالة الثانية $a > 1$

بما ان $a > 1$ فإن $Ln(a) > 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\,Ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln(a)} = +\infty$$

اليك جدول تغيرات f_a :

الحالة $0 < a < 1$	x	$-\infty$	$+\infty$
	إشارة $f'_a(x)$	$-$	
	تغيرات f_a	$+\infty$ ↘	0

الحالة $a > 1$	x	$-\infty$	$+\infty$
	إشارة $f'_a(x)$	$+$	
	تغيرات f_a	0 ↗	$+\infty$

ملاحظة

1) الدالة f_a هي الدالة العكسية للدالة Log_a حيث $Log_a x = \frac{Ln\,x}{Ln\,a}$

$Log_a y = \frac{Ln\,y}{Ln\,a} = x$ ⟷ $y = a^x$ (f_a ، Log_a)

2) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_{\frac{1}{a}}(x) = e^{x\,Ln\left(\frac{1}{a}\right)} = e^{-x\,Ln(a)} = f_a(-x)$

منه نستنتج أن المنحنيين الممثلين لـ f_a و $f_{\frac{1}{a}}$ متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

تمرين تدريبي

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها (γ) حيث $f(x) = (2-x)\times 3^x$

2) ادرس تغيرات g ثم ارسم منحناها (Γ) حيث $g(x) = x - 2^x \times \frac{1}{Ln(2)}$

الحل ✓

1) الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما: $x \mapsto 2-x$ و $x \mapsto 3^x$

و لدينا $f'(x) = 3^x\left(-x\,Ln3 + 2\,Ln(3) - 1\right)$

$f'(x) = 0$ تكافئ $x = \frac{2\,Ln(3)-1}{Ln(3)} = \alpha$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $\left(-x\,Ln(3) + 2\,Ln(3) - 1\right)$ و عليه

- إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]\alpha, +\infty[$
- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty, \alpha[$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$

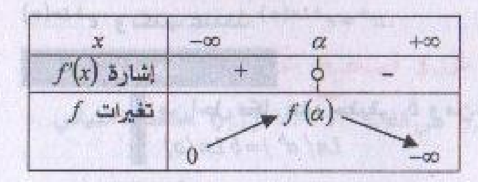
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (0)(+\infty)$ عدم التعيين.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^{x\,Ln(3)} = \lim_{x\to-\infty}\left[2e^{x\,Ln(3)} - x\,e^{x\,Ln(3)}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2e^{x\,Ln(3)} - \frac{1}{Ln(3)}x\,Ln(3)\times e^{x\,Ln(3)}\right] = 0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x\,Ln(3)\,e^{x\,Ln(3)} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} 2e^{x\,Ln(3)} = 0$

$\alpha \approx 1{,}1$ ، $f(\alpha) = 3{,}0135$



x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	0	$-$
تغيرات f	0 ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

2) - الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x) = 1 - 2^x = 1 - e^{x\,Ln(2)}$

$g'(x) = 0$ يكافئ $2^x = 1$ يكافئ $x = 0$.

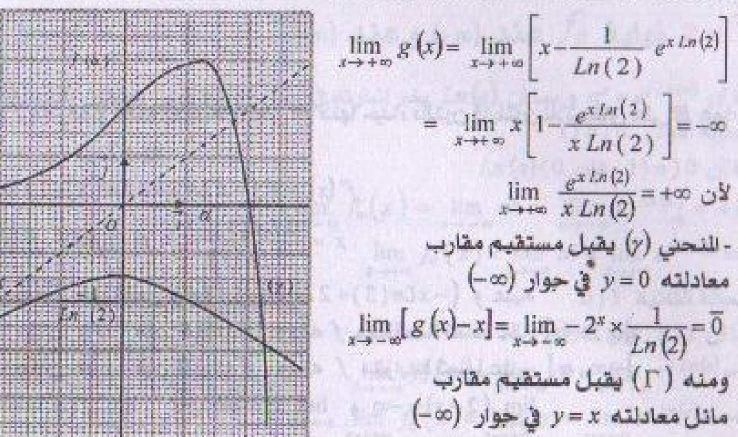
إذا كان $x > 0$ فإن $1 - 2^x < 0$ اي $g'(x) < 0$ ومنه g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

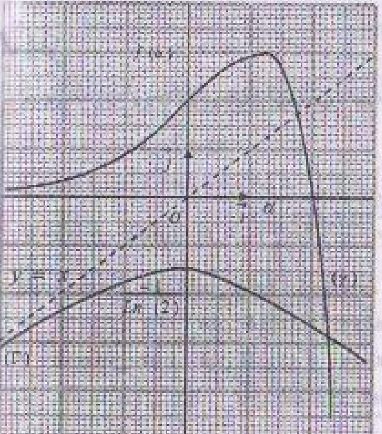
إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ اي $g'(x) > 0$ و منه g متزايدة تماما على $]-\infty, 0[$.

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	0	$-$
تغيرات g	$-\infty$ ↗	$\frac{-1}{Ln(2)}$	↘ $-\infty$





$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{1}{Ln(2)}\, e^{x\,Ln(2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[1 - \frac{e^{x\,Ln(2)}}{x\,Ln(2)}\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\,Ln(2)}}{x\,Ln(2)} = +\infty$

- المنحنى (γ) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-x\right] = \lim_{x\to-\infty} -2^x \times \frac{1}{Ln(2)} = \overline{0}$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$ في جوار $(-\infty)$

8. الأسس الحقيقية

من اجل كل عدد حقيقي $a\rangle 0$ و من اجل كل عدد حقيقي b نرمز إلى a^b بالرمز $e^{b\,Ln(a)}$ و نكتب عندئذ $a^b = e^{b\,Ln(a)}$.

نتيجة

من اجل كل عدد حقيقي b و من اجل كل عدد حقيقي $a\rangle 0$ لدينا $Ln(a^b) = b\,Ln(a)$

ملاحظة

- إذا كان b عدد صحيح فإن الكتابة a^b لها معنى من اجل كل عدد حقيقي a غير معدوم
- إذا كانت b عدد حقيقي غير صحيح فإن a^b لا يكون معرفا إلا من اجل $a\rangle 0$.

مثال

1) $3^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\,Ln(3)}$ ، 2) $2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Ln(2)}$

3) $(-2)^{\frac{1}{2}} \neq e^{\frac{1}{2}Ln(-2)}$ لأن $Ln(-2)$ غير موجود

مبرهنة

من اجل كل عددين حقيقيين $a\rangle 0$ و $a'\rangle 0$ و من اجل كل عددين حقيقيين b و b' لدينا:

1) $1^b = 1$ ، 2) $a^b \times a^{b'} = a^{b+b'}$ و $(a a')^b = a^b \times a'^b$

3) $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ و $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ و $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$

الإثبات

1) $Ln(1^b) = b\,Ln(1) = 0$ ومنه $1^b = 1$ لأن الدالة Ln متزايدة تماما.

2) $Ln(a^b)^{b'} = b'Ln(a^b) = b'b\,Ln(a) = Ln(a^{bb'})$ و عليه $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

$$Ln\left(\frac{a^b}{a^{b'}}\right) = Ln(a^b) - Ln(a^{b'}) = b\,Ln(a) - b'Ln(a) = (b-b')\,Ln(a) = Ln(a^{b-b'})$$

ومنه $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ بنفس الكيفية نبين النتائج الأخرى.

ملاحظة

- المساواة $(e^a)^b = e^{ab}$ محققة من اجل كل a عدد حقيقي و b عدد صحيح و تبقى صحيحة من اجل كل عدد حقيقي a و من اجل كل عدد حقيقي b.
- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ غير محققة من اجل اعداد حقيقية $a\langle 0$ و هذا عندما يكون b و b' عددان حقيقيان غير صحيحين.

9. الدوال : $x \mapsto x^n$ مع n عدد صحيح غير معدوم

من اجل كل عدد صحيح n غير معدوم ، f_n هي الدالة $x\mapsto x^n$ و (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

لما يكون n عددا صحيحا سالبا غير معدوم و x عددا حقيقيا غير معدوم $f_n(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

إذن ندرس الدالتين $x\mapsto x^n$ و $x\mapsto \frac{1}{x^n}$ مع n عدد طبيعي أكبر من او يساوي 1.

1) دراسة الدالة $x\mapsto x^n$ و $n\geq 1$

f_n معرفة على $\mathbb{R}$.

إذا كان n زوجيا فإنه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = f_n(x)$ اي f_n زوجية.

إذا كان n فرديا فإنه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = -f_n(x)$ اي f_n فردية.

• دراسة تغيرات f_n

بما ان f_n زوجية او فردية (حسب n) فإننا نقتصر دراستها على $[0,+\infty[$.

- إذا كان $n=1$ فإن $f_n(x)=x$

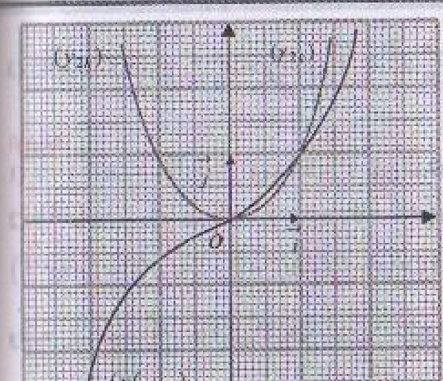
و هي دالة تآلفية بيانها مستقيم معادلته $y=x$.

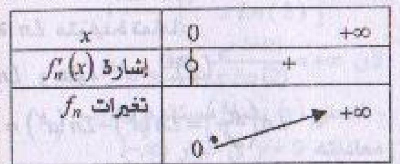
- إذا كان $n\geq 2$ فإنه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

من اجل كل $x>0$ لدينا $f'_n(x)>0$

بالتالي f_n متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$





x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$	0	$+$
تغيرات f_n	0	$+\infty$

صورة $]0,+\infty[$ بالدالة f_n هي $]0,+\infty[$

وبالتالي f_n تقابل من: $]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.

و التمثيل البياني للدالة f_n هو المنحني (γ_n) يقبل مماسا افقيا في النقطة $o(0,0)$.

ب) دراسة الدالة $f_n : x\mapsto \frac{1}{x^n}$ و $n\ge1$

f_n معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$.

- إذا كان n زوجيا فإن f_n زوجية و إذا كان n فرديا فإن f_n فردية.
- دراسة تغيرات f_n

تقتصر الدراسة على $]0,+\infty[$ (لأن f_n زوجية أو فردية حسب n).

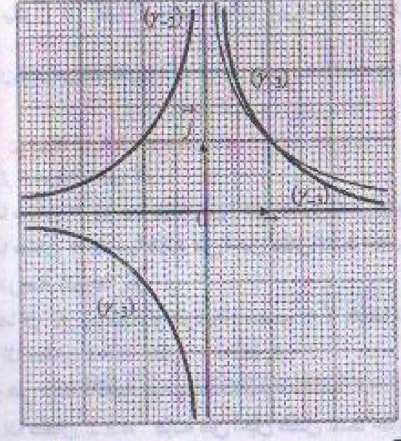
من اجل $x>0$ يكون $f'_n(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$

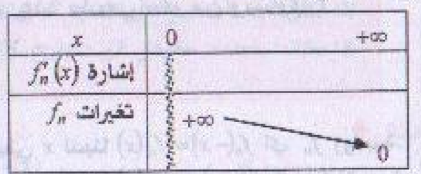
من اجل كل $x>0$ يكون $f'_n(x)<0$

و منه f_n متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to0} f_n(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.

واليك جدول تغيرات الدالة f_n





x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$		$-$
تغيرات f_n		$+\infty$ → 0

بما أن صورة $]0,+\infty[$ بالدالة f_n هي $]0,+\infty[$

فإن الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ في $]0,+\infty[$.

المنحنى (γ_n) يقبل المستقيم $y=0$

مقاربا أفقيا و يقبل المستقيم

ذا المعادلة $x=0$ مقاربا عموديا.

ملاحظة

من اجل كل عدد حقيقي α و من اجل كل $x>0$ لدينا $x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$

و دراسة الدالة $x\mapsto x^\alpha$ على $]0,+\infty[$ يؤول إلى دراسة $x\mapsto e^{\alpha\ln(x)}$

و تسمى الدالة $x\mapsto x^\alpha$ دالة الأس.

تمرن تدريبي

x عدد حقيقي يختلف عن 1. احسب المجموع التالي $S=1+x+x^2+...+x^n$

✓ الحل

الأعداد $1, x, x^2, ..., x^n$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها x و حدها الأول 1 و عدد حدود S هي $n+1$

إذن $S=1\times\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

10 - دالة الجذر النوني

في هذه الفقرة n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

لتكن f_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f_n(x)=x^n$

f_n تقابل من $[0,+\infty[$ في $[0,+\infty[$ إذن من اجل كل $y\in[0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد x بحيث $x^n=y$.

إذا كان $y>0$ فإن $\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n=y$ و بالتالي $x=y^{\frac{1}{n}}$

و إذا كان $y=0$ فإن $x=0$.

نسمي العدد الحقيقي الموجب x بالجذر النوني لـ y

و نرمز له بـ $\sqrt[n]{\ }$ و نكتب $x=\sqrt[n]{y}$.

إذن من اجل كل $x\ge0$ و $y\ge0$ لدينا

$y=x^n$ يكافئ $x=\sqrt[n]{y}$.

f_n

$x=\sqrt[n]{y}$ ⇄ $y=x^n$

$\sqrt[n]{\ }$

- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب y العدد الحقيقي الموجب x هي الدالة العكسية للدالة f_n.
- الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تسمى دالة الجذر النوني.

10-1 تعريف

دالة الجذر النوني هي الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و المعرفة على المجال $[0,+\infty[$

ملاحظة

بما ان $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ و $x>0$ فإن $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0}=0$

اذن نستطيع أن نعرف الدالة $\sqrt[n]{}$ كما يلي لما $x>0$ يكون $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0}=0$

10-2 خواص الدالة $\sqrt[n]{}$

مبرهنة

دالة الجذر النوني قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \to \frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$

الإثبات :

من اجل كل $x>0$ لدينا $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} Ln(x)}$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{n} Ln(x)} = \frac{1}{n}\times\frac{1}{x}\times(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n} - 1}$$

ملاحظة

الدالة $\sqrt[n]{}$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و منحناها البياني له مماس عمودي عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

نتيجة

دالة الجذر النوني مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

10-3 التمثيل البياني للدالة $\sqrt[n]{}$

دالة الجذر النوني هي الدالة العكسية للدالة $x\mapsto x^n$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ و منحناهما البيانيان متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة : $y=x$.

تمرن تدريبي 1

1) a عدد حقيقي موجب يختلف عن 1 برهن ان $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$ حيث n ، p عددان طبيعيان غير معدومين.

2) بسط العدد B حيث $B=\sqrt[3]{54}\times\sqrt[5]{64}\sqrt{6}$.

الحل ✓

1) $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{pLn(a)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{n} Ln(a)}\right)^p = \left(e^{Ln(a)}\right)^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{p}{n}}$

2) $B = 54^{\frac{1}{3}}\times 64^{\frac{1}{5}}\times 6^{\frac{1}{2}} = (3^3\times2)^{\frac{1}{3}}\times(2^6)^{\frac{1}{5}}\times(2\times3)^{\frac{1}{2}}$

$=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{6}{5}}\times 2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{61}{30}}$

تمرن تدريبي 2

1) حل المعادلة $x^{\frac{4}{3}}=2$ ، ب) حل المتراجحة $(x-1)^{-\frac{3}{2}}\geq 2$

الحل ✓

1) $x^{\frac{4}{3}}=2$ برفع الطرفين إلى القوة $\frac{3}{4}$ نجد $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ اي $x=2^{\frac{3}{4}}$

2) $(x-1)^{\frac{-3}{2}} \geq 2$ يكافئ $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}\geq 2$ بالقلب نجد $(x-1)^{\frac{3}{2}}\leq\frac{1}{2}$ و بما ان دالة الأس متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ فإنه نستنتج $\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ اي $x-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ منه $x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1$.

حتى تكون المتراجحة لها معنى يجب أن يكون $x-1>0$ اي $x>1$

إذن مجموعة الحلول هي $S=\left]1,\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+1\right]$

11. مقارنة بعض الدوال بجوار $(+\infty)$

الدوال $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$)، $x \mapsto Ln\, x$ و $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ و نهاية كل منها هي $(+\infty)$ و عليه من اجل قيم كبرى لـ x الأعداد x^n ، $Ln(x)$ ، e^x تكبر أكثر فاكثر و الهدف هو مقارنة ترتيب القادير e^x ، x^n ، $Ln(x)$ من اجل قيم كبرى لـ x .

من اجل ذلك ندرس النهايات عند $(+\infty)$ للدوال $x \mapsto \frac{Ln(x)}{x^n}$ ، $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$

مبرهنة :

من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Ln\, x}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

الإثبات :

1) بوضع $X = x^n$ يكون $x = X^{\frac{1}{n}}$ و لما $x \to +\infty$ فإن $X \to +\infty$ و

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Ln\, x}{x^n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{Ln\left(X^{\frac{1}{n}}\right)}{X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{Ln\, X}{X} = 0$$

2) لدينا $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n\, Ln(x)}} = e^{x - n\, Ln(x)}$ و عليه

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} e^{x - n\, Ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\left(1 - \frac{n\, Ln(x)}{x}\right)} = +\infty$$ لأن $$\lim_{x \to +\infty} \frac{Ln\, x}{x} = 0$$

تفسير المبرهنة :

. بما ان $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ فإن العدد $\frac{e^x}{x^n}$ يصبح كبيرا جدا بجوار $(+\infty)$

و بصيغة اخرى من أجل قيم كبرى لـ x العدد x^n يصبح صغيرا جدا امام e^x من اجل كل عدد طبيعي n .

. بما ان $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Ln(x)}{x^n} = 0$ فإن العدد $\frac{Ln(x)}{x^n}$ يصبح صغيرا جدا من اجل قيم كبرى لـ x .

و من اجل قيم كبرى لـ x فإن العدد x^n يصبح كبيرا جدا امام $Ln(x)$.

نقول عندئذ من اجل قيم كبيرة بالقدر الكافي لـ x ان $Ln(x) < x^n < e^x$.

ملاحظة

المبرهنة تبقى صحيحة في حالة n عدد حقيقي موجب.

نتيجة

1) $\lim\limits_{x \to 0} x^n Ln\, x = 0$ ، 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$ من أجل كل $n > 0$ ، 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) e^x = 0$ مع $p(x)$ كثير حدود

الإثبات

1) بوضع $X = \frac{1}{x}$ نجد $\lim\limits_{x \to 0} x^n Ln\, x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{Ln\, X}{X^n} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^n}} = 0$

تمرين تدريبي 1

1) ادرس نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x) = \frac{e^x}{Ln\, x}$ ، ب) $f(x) = \frac{e^x}{(Ln\, x)^5}$ ، جـ) $f(x) = \frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}}$

2) بين انه من اجل كل $x > 0$ يكون $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\, x}\right)^2$

ثم استنتج نهاية $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2}$ عند $(+\infty)$

✓ الحل

1) أ)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{Ln\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{e^x}{x}\right)}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)} = +\infty$$

ب)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(Ln\, x)^5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} \times \frac{1}{\left(\frac{Ln\, x}{x}\right)^5} = +\infty$$

جـ)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x \to +\infty} e^x x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\, e^x = +\infty$$

2)
$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\, x)^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{(Ln\, x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\, x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(Ln\,x)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{6\,Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{36}\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{Ln\left(x^{\frac{1}{6}}\right)}\right)^2=+\infty$$

تمرين تدريبي 2

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x>0$ يكون $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}>\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$

2) استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ حيث $f(x)=\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}$

✓ الحل

1) من اجل كل $x>0$ يكون $5x+3>x$ و بما ان الدالة exp متزايدة تماما فانه ينتج $e^{5x+3}>e^{x}$ و بالقسمة على $x^{\frac{5}{2}}$ نجد $\frac{e^{5x+3}}{x^{\frac{5}{2}}}>\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$

2)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^{5}\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(32\frac{e^{2x}}{(2x)^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{X\to+\infty}\left(32\frac{e^{X}}{X^{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=+\infty$$

لأن $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X^{n}}=+\infty$ حيث $X=2x$.

بما ان $f(x)\ge\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\frac{5}{2}}}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من اجلها العبارة المعطاة لها معنى:

أ) $Ln(1-x)$ ، ب) $Ln(x^{3})$ ، جـ) $\frac{1}{x}Ln(1+x)$

د) $Ln(2x^{2}-4)$ ، هـ) $Ln(2x-4)(3-x)$

و) $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ ، ن) $Ln(x^{2}+x+1)$

✓ الحل

أ) حتى يكون للعبارة $Ln(1-x)$ معنى يجب ان يكون $1-x>0$ اي $x<1$
ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty,1[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln(x^{3})$ معنى يجب ان يكون $x^{3}>0$ اي $x>0$
ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]0,+\infty[$

جـ) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x}Ln(1+x)$ معنى يجب ان يكون $1+x>0$ و $x\neq0$
اي $x>-1$ و $x\neq0$
ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

د) حتى يكون للعبارة $Ln(2x^{2}-4)$ معنى يجب ان يكون $2x^{2}-4>0$
اي $x\in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$
ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

هـ) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)(3-x)$ معنى يجب ان يكون $(2x-4)(3-x)>0$
اي $x\in]2,3[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]2,3[$

و) حتى يكون للعبارة $Ln(2x-4)+Ln(3-x)$ معنى يجب ان يكون $3-x>0$ و $2x-4>0$
اي $x<3$ و $x>2$
ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]2,3[$

ن) حتى يكون للعبارة $Ln(x^{2}+x+1)$ معنى يجب ان يكون $x^{2}+x+1>0$
مميز $x^{2}+x+1$ هو $\Delta=-3$
ومنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x^{2}+x+1>0$
لذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}$.

تطبيق 2 تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من اجلها العبارة المعطاة لها معنى :

ا) $Ln\left(x^2+9x\right)$ ، ب) $Ln\left(\left|x^2-3x+2\right|\right)$

جـ) $Ln\left(\left|x-1\right|\right)-Ln\left(\left|x+1\right|\right)$ ، د) $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

هـ) $Ln\left(\sqrt{x-1}-2\right)$ ، و) $Ln\left(x|x|-1\right)$

ن) $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ ، ي) $\frac{1}{x\,Ln\,x}$

✓ الحل

ا) حتى يكون للعبارة $Ln\left(x^2+9x\right)$ معنى يجب ان يكون $x^2+9x>0$

$x^2+9x>0$ يكافئ $x\in\left]-\infty,-9\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\left]-\infty,-9\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

ب) حتى يكون للعبارة $Ln\left(\left|x^2-3x+2\right|\right)$ معنى يجب ان يكون $\left|x^2-3x+2\right|>0$

$\left|x^2-3x+2\right|>0$ يكافئ $x^2-3x+2\neq0$ يكافئ $(x\neq1)$ و $(x\neq2)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,2\}$

جـ) حتى يكون للعبارة $Ln\left(\left|x-1\right|\right)-Ln\left(\left|x+1\right|\right)$ معنى يجب ان يكون $|x-1|>0$ و $|x+1|>0$

اي $x-1\neq0$ و $x+1\neq0$

$(x-1\neq0$ و $x+1\neq0)$ يكافئ $(x\neq1)$ و $(x\neq-1)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

د) حتى يكون للعبارة $Ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$ معنى يجب ان يكون $\frac{x-2}{3-x}>0$ و $3-x\neq0$

$\frac{x-2}{3-x}>0$ إذا و فقط إذا كان $x\in\left]2,3\right[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\left]2,3\right[$

هـ) حتى يكون لـ $Ln\left(\sqrt{x-1}-2\right)$ معنى يجب ان يكون $x-1\geq0$ و $\sqrt{x-1}-2>0$

$x-1\geq0$ يكافئ $x\geq1$

$\sqrt{x-1}-2>0$ يكافئ $\sqrt{x-1}>2$ يكافئ $x-1>4$ يكافئ $x>5$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\left]5,+\infty\right[$

و) حتى تكون للعبارة $Ln\left(x|x|-1\right)$ معنى يجب ان يكون $x|x|-1>0$ .... (I)

حل المتراجحة (I) ؛

- حالة $x\geq0$ ؛

المتراجحة (I) تكافئ $x^2-1>0$ تكافئ $x>1$

ومنه مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $\left]1,+\infty\right[$

- حالة $x\leq0$ ؛

المتراجحة (I) تكافئ $-x^2-1>0$ تكافئ $x^2+1<0$

المتباينة $x^2+1<0$ خاطئة ومنه مجموعة حلول المتراجحة $x|x|-1>0$ هي ϕ

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\phi\cup\left]1,+\infty\right[=\left]1,+\infty\right[$

ن) حتى يكون للعبارة $\frac{\sqrt{x+3}}{Ln(x+1)}$ معنى يجب ان يكون $x+3\geq0$ و $x+1>0$

و $Ln(x+1)\neq0$ وهذا يعني $x\geq-3$ و $x>-1$ و $x+1\neq1$

اي $x\geq-3$ و $x\geq-1$ و $x\neq0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

ي) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x\,Ln(x)}$ معنى يجب ان يكون $x>0$ و $Ln(x)\neq0$

اي $x>0$ و $x\neq1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

تطبيق 3 تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}Ln\,x$ مع a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، $A(1,0)$ نقطة من (C_f) ، المماس لـ (C_f) في A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+2$

1) احسب من اجل كل x من $\left]0,+\infty\right[$ عبارة $f'(x)$

2) ا) بين ان $f'(1)=3$ ، ثم استنتج ان $a+1=3$

ب) بين ان $a+b=0$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ ولدينا ،

$$f'(x)=a+\left(\frac{-1}{x^2}\right)Ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}=a+\frac{1}{x^2}\left[-Ln(x)+1\right]$$

2) ا) بما ان المماس للمنحني (C_f) عند A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=3x+1$

فإن ميله هو 3 و عليه فإن $f'(1)=3$

لدينا $f'(1)=a+\left[-Ln(1)+1\right]=a+1$ ومنه نستنتج ان $a+1=3$

ب) بما أن $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f) فإن $f(1)=0$

$f(1)=0$ يكافئ $a+b=0$

لدينا $\begin{cases} a+1=3 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ إذن $f(x)=2x-2+\frac{1}{x}Ln(x)$

تطبيق 4 تعيين اتجاه تغير دالة

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3}{x}+Ln\,x$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$

2) شكل جدول تغيرات f ثم استنتج أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)>0$

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-3+x}{x^2}$

2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-3+x$ لأن المقام موجب تماما و عليه :

إذا كان $x=3$ فإن $f'(3)=0$

إذا كان $x>3$ فإن $f'(x)>0$

إذا كان $0<x<3$ فإن $f'(x)<0$

لدينا $f(3)=1+Ln\,3$

و بما أن $Ln\,3>0$ فإن $f(3)>0$

x	0		3		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	‖	↘	$f(3)$	↗	

نستنتج من جدول تغيرات f أنه من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)\geq f(3)$ أي $f(x)>0$

تطبيق 5 حساب المشتق

f ، g ، h ثلاث دوال معرفة على $]0,+\infty[$ بـ :

$f(x)=x\,Ln\,x$ ، $g(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $h(x)=Ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- عين $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$

✓ الحل

أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=Ln\,x+\frac{1}{x}\times x$ أي $f'(x)=1+Ln\,x$

ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1-Ln\,x}{x^2}$

جـ) الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

هما $x\xrightarrow{h_1}\frac{x}{x+1}$ و $x\xrightarrow{h_2}Ln\,x$ مع $(h=h_2\circ h_1)$

ومن أجل كل $x>0$ لدينا $h'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{1}{x(x+1)}$

تطبيق 6 تبسيط أعداد باستعمال لوغاريتم الجداء

بسط الأعداد التالية :

$Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ، $Ln\left(\frac{1}{5}\right)$ ، $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)$

$Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)$ ، $Ln(567)-Ln(72)-Ln\frac{7}{8}+Ln\left(\frac{1}{27}\right)$

$Ln\sqrt{\sqrt{5}+2}+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ ، $Ln\sqrt{135}+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln\sqrt{27}$

✓ الحل

- $Ln(4)+Ln\left(\frac{1}{4}\right)=Ln\left(4\times\frac{1}{4}\right)=Ln(1)=0$

حسب قاعدة لوغاريتم مقلوب عدد يكون $Ln\left(\frac{1}{5}\right)=-Ln(5)$

- $Ln(\sqrt{5}+2)+Ln(\sqrt{5}-2)=Ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=Ln(5-4)=Ln(1)=0$

- $Ln(\sqrt{17}+4)-Ln(\sqrt{17}-4)=Ln\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right)=Ln\left(\frac{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)$

$=Ln\left(\frac{17-16}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=Ln\left(\frac{1}{(\sqrt{17}-4)^2}\right)=-2\,Ln(\sqrt{17}-4)$

- $Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)+Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)=Ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

$=Ln\left(\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\right)=Ln\left(\sqrt{5-4}\right)=Ln\sqrt{1}=0$

- $Ln\,567-Ln\,72-Ln\left(\frac{7}{8}\right)+Ln\left(\frac{1}{27}\right)=Ln(3^4\times7)-Ln(2^3\times3^2)-Ln\frac{7}{8}-Ln(27)$

$=4\,Ln(3)+Ln(7)-3\,Ln(2)-2\,Ln(3)-Ln(7)+3\,Ln(2)-3\,Ln(3)$

$$= -Ln(3)+Ln(7) = Ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

• $Ln(\sqrt{135})+Ln\sqrt{75}-Ln15-Ln(\sqrt{27})=\frac{1}{2}Ln135+\frac{1}{2}Ln75-Ln15-\frac{1}{2}Ln27$

$$= \frac{1}{2}(3Ln3+Ln5)+\frac{1}{2}(Ln3+2Ln5)-Ln3-Ln5-\frac{3}{2}Ln3$$

$$= \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}\right)Ln3+\left(\frac{1}{2}+1-1\right)Ln5$$

$$= -\frac{1}{2}Ln3+\frac{1}{2}Ln5 = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{5}{3}\right)=Ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

تطبيق 7 إثبات صحة مساواة

برهن انه من اجل كل $x>0$ يكون لدينا :

أ) $Ln(x+2)=Ln x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ، ب) $Ln(2+x^2)=2Ln x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

جـ) $Ln(x^2+x+1)=2Ln x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)$

✓ الحل

أ) $Ln(x+2)=Ln(x)\left(1+\frac{2}{x}\right) = Ln x+Ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

ب) $Ln(2+x^2)=Ln(x^2)\left(\frac{2}{x^2}+1\right) = Ln x^2+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$

$$=2Ln x+Ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

جـ) $Ln(x^2+x+1)=Ln(x^2)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = Ln(x^2)+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=2Ln x+Ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

د) $Ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)=Ln\left(\frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = Ln\left(\frac{x+1}{1+\frac{1}{x}}\right)$

تطبيق 8 تعيين مجموعة تكون فيها مساواة صحيحة

عين مجموعة الأعداد x التي من اجلها تكون المساواة صحيحة في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $Ln(2+x)=Ln x+Ln\left(\frac{2}{x}+1\right)$ ، ب) $Ln(x^2-1)=Ln(x+1)+Ln(x-1)$

جـ) $Ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=Ln(x+1)-Ln(x-2)$ ، د) $Ln(x^2)=2Ln(-x)$

✓ الحل

أ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$2+x>0$ و $x>0$ و $\frac{2}{x}+1>0$

اي $x>-2$ و $x>0$ و $x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]0,+\infty[$

ب) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2-1>0$ و $x+1>0$ و $x-1>0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ و $x>-1$ و $x>1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]1,+\infty[$

جـ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$\frac{x+1}{x-2}>0$ و $x-2\neq0$ و $x+1>0$ و $x-2>0$

اي $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ و $x>-1$ و $x>2$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]2,+\infty[$

د) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2>0$ و $-x>0$

اي $x\in\mathbb{R}^*$ و $x\in]-\infty,0[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D=]-\infty,0[$.

تطبيق 9 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln(3x+2)=0$ ، ب) $Ln(3x+2)=1$ ، جـ) $Ln(3x+2)=-1$

د) $Ln(3x-2)=2$ ، هـ) $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6Ln2$

و) $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln3$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2 \rangle 0$ اي $x \rangle -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]-\frac{2}{3},+\infty[$

$Ln(3x+2)=0$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(1)$

ومنه نستنتج $3x+2=1$ اي $x=\frac{-1}{3}$

بما ان $\frac{-1}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة $Ln(3x+2)=0$ هي $S=\{-\frac{1}{3}\}$

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب ان يكون $3x+2\rangle 0$ اي $x\rangle -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (المجموعة المرجعية) هي $D=]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$Ln(3x+2)=1$ تعني $Ln(3x+2)=Ln(e)$

ومنه ينتج $3x+2=e$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e-2}{3}$.

بما ان $\frac{e-2}{3}\in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{\frac{e-2}{3}\}$

جـ) المجموعة المرجعية هي $D=]-\frac{2}{3}, +\infty[$

المساواة $Ln(3x+2)=-1$ تكتب $Ln(3x+2)=Ln(\frac{1}{e})$

ومنه ينتج $3x+2=\frac{1}{e}$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$.

بما ان $\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}$ ينتمي إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{\frac{1}{3e}-\frac{2}{3}\}$

د) حتى يكون للمساواة معنى يجب ان يكون $3x-2\rangle 0$ اي $x\rangle\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]\frac{2}{3}, +\infty[$.

المساواة $Ln(3x-2)=2$ تكتب $Ln(3x-2)=Ln(e^2)$

ومنه نستنتج $3x-2=e^2$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=\frac{e^2+2}{3}$

بما ان $\frac{e^2+2}{3}\rangle\frac{2}{3}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{\frac{e^2+2}{3}\}$.

هـ) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون :

$x-2\rangle 0$ و $x-32\rangle 0$ اي $x\rangle 2$ و $x\rangle 32$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]32, +\infty[$

المساواة $Ln(x-2)+Ln(x-32)=6Ln(2)$ تكتب $Ln(x-2)(x-32)=Ln(2^6)$

اي $(x-2)(x-32)=64$ بالتبسيط نجد $x^2-34x=0$

و بعد حل هذه المعادلة نجد $x=0$ أو $x=34$

بما ان 0 لا ينتمي الى D فهو مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{34\}$

و) حتى يكون للمساواة معنى يجب ان يكون :

$-2x+5\rangle 0$ و $4x-5\rangle 0$ اي $x\langle\frac{5}{2}$ و $x\rangle\frac{5}{4}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]\frac{5}{4},\frac{5}{2}[$.

المساواة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln(3)$ تكتب $Ln(-2x+5)(4x-5)=Ln(\frac{1}{3})$

و منه ينتج $(-2x+5)(4x-5)=\frac{1}{3}$ بالتبسيط نجد $-24x^2+90x-76=0$

مميز المعادلة $-24x^2+90x-76=0$ هو $\Delta=804$

بما ان $\Delta\rangle 0$ فإن للمعادلة حلان $x_1=\frac{-90+\sqrt{804}}{-48}$ و $x_2=\frac{-90-\sqrt{804}}{-48}$

x_1 و x_2 ينتميان إلى D

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $Ln(-2x+5)+Ln(4x-5)=-Ln3$ هي $S=\{x_1, x_2\}$

تطبيق 10 حل معادلات

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln x=Ln(x^2+4x)$ ، ب) $2Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$

جـ) $Ln(x+2)+Ln(x+1)=Ln(x+10)$

د) $Ln(\sqrt{3x-1})+Ln(\sqrt{x-1})=Ln(x-2)$

✓ الحل

أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $x\rangle 0$ و $x^2+4x\rangle 0$

اي $x\rangle 0$ و $x\in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0,+\infty[$.

المساواة $Ln(x)=Ln(x^2+4x)$ تكتب $x=x^2+4x$ اي $x^2+3x=0$

$x^2+3x=0$ تكافئ $x=0$ او $x=-3$

بما ان 0 و 3- لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة $Ln\,x=Ln(x^2+4x)$ ليس لها حلول.

ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب ان يكون :

$x+1>0$ و $x+5>0$ و $2x+2>0$ اي $x>-1$ و $x>-5$

ومنه مجموعة تعويف المعادلة هي $D=]-1,+\infty[$

المساواة $2Ln(x+1)=Ln(x+5)+Ln(2x+2)$ تكتب $Ln(x+1)^2=Ln(x+5)(2x+2)$

ومنه ينتج $x^2+10x+9=0$ .... (1)

بما ان مميز المعادلة (1) هو $\Delta=64$ فإن للمعادلة حلان هما $x_1=-1$ و $x_2=-9$

بما ان x_1 و x_2 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة (ب) ليس لها حلول.

ج) حتى تكون للمساواة (ج) لها معنى يجب ان يكون :

$x+2>0$ و $x+1>0$ و $x+10>0$

اي x ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ ومنه $D=]-1,+\infty[$.

المساواة $Ln(x+2)+Ln(x+1)=Ln(x+10)$ تكتب $Ln(x+2)(x+1)=Ln(x+10)$

و منه ينتج $(x+2)(x+1)=x+10$ بالتبسيط نجد $x^2+2x-8=0$ ... (2)

مميز المعادلة (2) هو $\Delta=36$

ومنه المعادلة (2) لها حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-4$

بما ان $2\in D$ و $-4\notin D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S=\{2\}$.

د) حتى تكون للمساواة (د) لها معنى يجب ان يكون :

$3x-1>0$ و $x-1>0$ و $x-2>0$ اي $x>\frac{1}{3}$ و $x>1$ و $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D=]2,+\infty[$.

المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln(\sqrt{3x-1}\times\sqrt{x-1})=Ln(x-2)$

اي $Ln\sqrt{(3x-1)(x-1)}=Ln(x-2)$ ومنه ينتج $\sqrt{(3x-1)(x-1)}=x-2$

بتربيع الطرفين نجد $(3x-1)(x-1)=x^2-4x+4$ و بالتبسيط نجد $2x^2-3=0$

حلول المعادلة $2x^2-3=0$ هما $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

بما ان $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا ينتميان إلى D

فإن مجموعة حلول المعادلة (د) هي ϕ.

تطبيق 11 حل متراجحات

- حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(2x-4)\geq 0$ ، ب) $Ln(2x-4)>1$ ، ج) $Ln(x-4)\geq Ln2$

د) $Ln\left(\frac{1}{x}\right)>3$ ، هـ) $(Ln\,x)^2\leq 36$

الحل

أ) حتى تكون للمتراجحة (أ) معنى يجب ان يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D=]2,+\infty[$.

المتراجحة $Ln(2x-4)\geq 0$ تكتب $Ln(2x-4)\geq Ln1$ ومنه ينتج $2x-4\geq 1$ اي $x\geq\frac{5}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[\cap D=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$

ب) حتى تكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون $2x-4>0$ اي $x>2$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]2,+\infty[$

المتراجحة $Ln(2x-4)\geq 1$ تكافئ $2x-4\geq e$ اي $x\geq\frac{e+4}{2}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left[\frac{e+4}{2},+\infty\right[\cap]2,+\infty[=\left[\frac{e+4}{2},+\infty\right[$

ج) حتى تكون للمتراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $x-4>0$ اي $x>4$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D=]4,+\infty[$

المتراجحة $Ln(x-4)\geq Ln(2)$ تكافئ $x-4\geq 2$ اي $x\geq 6$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S=[6,+\infty[\cap]4,+\infty[=[6,+\infty[$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $\frac{1}{x}>0$ و $x>0$ اي $x\in]0,+\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D=]0,+\infty[$.

المتراجحة $Ln\left(\frac{1}{x}\right)>3$ تكافئ $\frac{1}{x}>e^3$ ومنه ينتج $x<e^3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=(]0,+\infty[)\cap(]-\infty,e^3[)=]0,e^3[$

هـ) حتى يكون للمتراجحة (هـ) معنى يجب أن يكون $x>0$

و منه مجموعة تعريف المتراجحة (هـ) هي $D=]0,+\infty[$

المتراجحة $(Ln\,x)^2\leq 36$ تكافئ $-6\leq Ln\,x\leq 6$ و هذه الأخيرة تكافئ :

$Ln\,e^{-6}\leq Ln\,x\leq Ln\,e^6$ و بما ان الدالة Ln متزايدة تماما فإنه ينتج $e^{-6}<x<e^6$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=(]0,+\infty[)\cap(]e^{-6},e^6[)=]e^{-6},e^6[$

تطبيق 12 — حل متراجحات

حل المتراجحات التالية :

أ) $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ ، ب) $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$

ج) $Ln(3x^2-x) \leq Ln x + Ln 2$ ، د) $Ln(4-x) - Ln3 + Ln x \geq 0$

الحل

أ) حتى يكون للمتراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $6x+10>0$ و $3x^2+5x>0$

أي $x > \frac{-5}{3}$ و $x \in]-\infty, \frac{-5}{3}[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D=]0,+\infty[$

المتراجحة $Ln(3x^2+5x) \geq Ln(6x+10)$ تكافئ $3x^2+5x \geq 6x+10$

أي $3x^2-x-10 \geq 0$ .... (1)

مميز كثير الحدود $(3x^2-x-10)$ هو $\Delta=121$

ومنه للمعادلة $3x^2-x-10=0$ حلان هما $x_1=2$ و $x_2=\frac{-5}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{-5}{3}$	2	$+\infty$
$3x^2-x-10$	+	0 −	0 +	

من الجدول المجاور نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي :

$S=\left(]-\infty,\frac{-5}{3}[\cup]2,+\infty[\right) \cap]0,+\infty[$

ب) حتى يكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون :

$x+1>0$ و $3x+1>0$ أي $x>-1$ و $x>\frac{-1}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D=]-\frac{1}{3},+\infty[$

المتراجحة $3Ln(x+1) > Ln(3x+1)$ تكافئ $Ln(x+1)^3 > Ln(3x+1)$

و منه ينتج $(x+1)^3 > 3x+1$ بالتبسيط نجد $x^2(x+3) > 0$ ..... (2)

و مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $]-3,0[\cup]0,+\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=D\cap(]-3,0[\cup]0,+\infty[)=]-\frac{1}{3},0[\cup]0,+\infty[$

ج) حتى يكون للمتراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $3x^2-x>0$ و $x>0$ أي :

$x \in]-\infty,0[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$ و $x>0$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي $D=]\frac{1}{3},+\infty[$

المتراجحة (ج) تكتب على الشكل $Ln(3x^2-x) \leq Ln(2x)$ ومنه ينتج $3x^2-x \leq 2x$

بعد التبسيط نجد $3x(x-1) \leq 0$

$3x(x-1)\leq 0$ يكافئ $x\in[0,1]$.

و منه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S=D\cap[0,1]=]\frac{1}{3},1]$

د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $4-x>0$ و $x>0$

أي $x<4$ و $x>0$ و منه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D=]0,4[$

المتراجحة (د) تكتب على الشكل $Ln\frac{(4-x)(x)}{3} \geq Ln(1)$ و منه ينتج $\frac{(4-x)(x)}{3} \geq 1$

بعد التبسيط نجد $-x^2+4x-3\geq 0$ ..... (2)

مميز $(-x^2+4x-3)$ هو 4 و منه للمعادلة $-x^2+4x-3=0$ حلان هما 1 و 3

$-x^2+4x-3\geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x\in[1,3]$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=D\cap[1,3]=[1,3]$

تطبيق 13 — حل معادلات تشمل القيمة المطلقة

حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x-1|+Ln|x+1|=0$ ، ب) $Ln(|x-1|)+Ln(x+5)=3Ln(2)$

ج) $Ln(|2x+5|)+Ln(|x|)=2Ln(|x+1|)$

د) $Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)+1=0$

الحل

أ) حتى يكون للمعادلة (أ) معنى يجب أن يكون $|x-1|>0$ و $|x+1|>0$

أي $x\neq 1$ و $x\neq -1$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $D=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $Ln(|x-1||x+1|)=Ln(1)$ ومنه ينتج $|x^2-1|=1$ ... (1)

$|x^2-1|=1$ يكافئ $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ أو $x=0$

و منه حلول المعادلة (1) هي 0 ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$.

بما أن 0 ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ ينتميان إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة (أ) هي: $S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2},0\}$.

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $D=]-5\,,1[\cup]1\,,+\infty[$.

المعادلة (ب) تكتب $Ln|x-1|(x+5)=Ln(8)$ منه ينتج $|x-1|(x+5)=8$ ... (2)

- إذا كان $-5<x<1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x+3=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $x=-1$ و $x=-3$

وبما ان -1 و -3 ينتميان إلى $]-5\,,1[$ فهما مقبولان.

- إذا كان $x>1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2+4x-13=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}$ ، $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$.

$\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ مرفوض لأنه ليس اكبر من الواحد.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\left\{\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}\,,-1\,,-3\right\}$

جـ) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب ان يكون $|2x+5|>0$ و $|x|>0$ و $|x+1|>0$

اي $x\neq\frac{-5}{2}$ و $x\neq 0$ و $x\neq -1$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة (جـ) هي $D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2}\,,0\,,-1\right\}$

المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $Ln(|2x+5|\,|x|)=Ln\left(|x+1|^2\right)$

و منه ينتج $|x(2x+5)|=(x+1)^2$ ... (3)

- إذا كان $x\in\left]\frac{-5}{2},-1\right[\cup]-1,0[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1=0$

و حلا هذه الأخيرة هما $x_1=\frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ ، $x_2=\frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

x_1 و x_1 ينتميان الى $\left]\frac{-5}{2},0\right[-\{-1\}$ فهما مقبولان

- إذا كان $x\in\left]-\infty,\frac{-5}{2}\right[\cup]0,+\infty[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل

$x^2+3x-1=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $x_3=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ، $x_4=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

x_3 و x_4 مقبولان لأنهما ينتميان الى $\left]-\infty,\frac{-5}{2}\right[\cup]0\,,+\infty[$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{x_1\,,x_2\,,x_3\,,x_4\}$

د) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب ان يكون $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>0$ و $x-1\neq 0$

اي $x\neq -2$ و $x\neq 1$ ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D=\mathbb{R}-\{1,-2\}$

المعادلة (د) تكتب على الشكل $Ln e^{-1}=Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)$ ومنه ينتج $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=e^{-1}$ ... (4)

- إذا كان $x\in]-2,1[$ فإن المعادلة (4) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1}=-e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x=\frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}$ و هذا الحل مقبول لأنه ينتمي الى $]-2,1[$

- إذا كان $x\in]-\infty,-2[\cup]1\,,+\infty[$ فإن المعادلة (4) تكتب $\frac{x+2}{x-1}=e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x=\frac{2e+1}{1-e}$ و هذا حل مقبول لأنه ينتمي الى $]-\infty,-2[$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S=\left\{\frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}\,,\frac{2e+1}{1-e}\right\}$

تطبيق 14 حل متراجحات تشمل القيمة المطلقة

حل المتراجحات التالية :

ا) $Ln(|x-1|)+Ln|x+1|\leq 0$ ، ب) $Ln|x+2|-Ln|x-1|+1>0$

جـ) $Ln(|2x+5|)+Ln(|x|)\geq 2Ln(|x+1|)$

الحل

ا) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ا) هي $D=\mathbb{R}-\{-1,+1\}$ المتراجحة (ا) تكتب على الشكل:

$Ln(|x-1||x+1|)\leq Ln(1)$ ومنه ينتج $|(x-1)(x+1)|\leq 1$ ... (1)

- إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2\geq 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1=]-1,1[$

- إذا كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2\leq 2$

ومجموعة حلولها هي $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_2=]-\sqrt{2},-1[\cup]1\,,\sqrt{2}]$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ا) هي $S=S_1\cup S_2$

ب) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ب) هي $D=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

من اجل كل x من D المتراجحة (ب) تكتب على الشكل،

$Ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right)\geq Ln\left(e^{-1}\right)$ ومنه ينتج $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\geq e^{-1}$ ... (2)

- إذا كان $x\in]-2\,,1[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $-\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x \geq \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S_1 = \left[\frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1} , 1 \right[$

- إذا كان $x \in]-\infty , -2[\cup]1 , +\infty[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)} \geq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_2 = \left] -\infty , \frac{2e+1}{1-e} \right] \cup]1 , +\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{2e+1}{1-e}$		-2		1		$+\infty$
$\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)}$		+	0	−	‖	−	‖	+	

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = S_1 \cup S_2$

جـ) المجموعة المرجعية للمتراجحة (جـ) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-5}{2} , 0 , -1 \right\}$

من اجل كل x من D المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل:

$Ln\left(|2x+5| \right) |x| \geq Ln\left(|x+2| \right)^2$

ومنه ينتج $|x(2x+5)| \geq (x+1)^2$ ....(3)

- إذا كان $x \in \left] \frac{-5}{2} , 0 \right[- \{-1\}$ فإن (3) تكتب على الشكل $3x^2+7x+1 \leq 0$ و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_1 = [x_2 , x_1] - \{-1\}$ مع $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

- إذا كان $x \in \left] -\infty , \frac{-5}{2} \right[\cup]0 , +\infty[$ فإن (3) تكتب على الشكل $x^2+3x-1 \geq 0$

و مجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_2 =]-\infty , x_4] \cup [x_3 , +\infty[$

حيث $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = S_1 \cup S_2$

تطبيق 15 حل معادلات و متراجحات

1) حل المعادلة $x^2+4x-5=0$ ..... (1)

2) لتكن $g(x)$ حيث $g(x) = (Ln\,x)^2 + Ln\,x - 5$

بوضع $X = Ln(x)$ ، حل المعادلة $g(x)=0$ .. (2)

3) حل المتراجحة $g(x) \geq 0$

✓الحل

1) مميز المعادلة (1) هو $\Delta = 36$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -5$

2) $g(x)=0$ يكافئ $X^2+4X-5=0$ يكافئ $(X=1)$ او $(X-=5)$

$X=1$ يكافئ $Ln\,x = Ln\,e$ يكافئ $x=e$

$X=-5$ يكافئ $Ln\,x = Ln\,e^{-5}$ يكافئ $x=e^{-5}$

و منه مجموعة حلول المعادلة $g(x)=0$ هي $S = \{e , e^{-5}\}$

3) $g(x) = X^2+4X-5 = (X-1)(X+5) = (Ln(x)-1)(Ln(x)+5)$

x	$-\infty$		e^{-5}		e		$+\infty$
$Ln(x)-1$		-		+	0	-	
$Ln(x)+5$		-	0	+		+	
$g(x)$		+	0	-	0	+	

$g(x) \geq 0$ يكافئ $x \in]-\infty , e^{-5}] \cup [e , +\infty[$

و منه مجموعة حلول المتراجحة $g(x) \geq 0$ هي: $]-\infty , e^{-5}] \cup [e , +\infty[$.

تطبيق 16 حل معادلات و متراجحات

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع $p(x) = 2x^3+3x^2+x-6$

1) ا) تحقق ان $p(1)=0$

ب) استنتج انه نستطيع كتابة $p(x) = (x-1)\varphi(x)$

و هذا من اجل كل x من $\mathbb{R}$ مع $\varphi(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

جـ) حل المتراجحة $p(x) \leq 0$

2) استعمل النتائج السابقة لحل المتراجحة

$2\,Ln\,x + Ln(2x+3) \leq Ln(6-x)$ ..... (I)

✓الحل

1) ا) لدينا $p(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$

ب) بما ان 1 جذر لـ $p(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $\varphi(x)$ درجته 2

بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $p(x) = (x-1)\varphi(x)$ و $\varphi(x) = ax^2+bx+c$

بما ان معامل x^3 في $p(x)$ هو 2 فإن $a=2$

بعد نشر $(x-1)\varphi(x)$ و مطابقته مع $p(x)$ نجد $b=5$ و $c=6$

إذن $p(x) = (x-1)(2x^2+5x+6)$

ج) لحل المتراجحة $p(x) \le 0$ نعين إشارة $p(x)$

$p(x)=0$ يكافئ $(x=1)$ او $(2x^2+5x+6=0)$

مميز المعادلة $2x^2+5x+6=0$ يساوي -23

ومنه المعادلة $2x^2+5x+6=0$ ليس لها حلول و إشارة $(2x^2+5x+6)$ موجبة تماما.

$p(x) \le 0$ إذا و فقط إذا كان $x \le 1$

و منه مجموعة حلول المتراجحة $p(x) \le 0$ هي $S=]-\infty , 1]$

2) مجموعة تعريف المتراجحة (I) هي $D=]0 , 6[$

من اجل كل x^* من D المتراجحة (I) تكتب على الشكل:

$Ln(x^2)(2x+3) \le Ln(6-x)$ و منه ينتج $2x^3+3x^2+x-6 \le 0$ ..... (II)

مجموعة حلول المتراجحة (II) هي $]-\infty ,1]$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة (I) هي:

$S'=]-\infty , 1]\cap]0 , 6[=]0 , 1]$

تطبيق 17

حل جملة معادلات

1) حل الجملة (I) .... $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ x-7y=-5 \end{cases}$

2) استنتج حل الجملة (II) ... $\begin{cases} 3\,Ln\,x+5\,Ln\,y=11 \\ Ln\,x-7Ln\,y=-5 \end{cases}$

✓ الحل

1) $\begin{cases} 3x+5y=11 \ ... \ (1) \\ x-7y=-5 \ ... \ (2) \end{cases}$ بضرب (2) في -3 ثم نجمعها مع (1) نجد $26y=26$

ومنه $y=1$ و بتعويض قيمة y اي (1) نجد $x=2$

إذن مجموعة حلول الجملة (I) هي $S=\{(2,1)\}$

2) مجموعة تعريف الجملة (II) هي مجموعة الثنائيات (x,y) بحيث $x\rangle 0$ و $y \rangle 0$

بوضع $X=Ln\,x$ و $Y=Ln\,y$ الجملة (II) تصبح كما يلي $\begin{cases} 3X+5Y=11 \\ X-7Y=-5 \end{cases}$

من السؤال الأول نجد $X=2$ و $Y=1$

$X=2$ يكافئ $Ln\,x=2$ يكافئ $x=e^2$

$Y=1$ يكافئ $Ln\,y=1$ يكافئ $y=e$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S_2=\{(e^2 , e)\}$

تطبيق 18

حل جملة معادلتين

1) حل في $I\!R^2$ الجملة التالية $\begin{cases} xy=4 \\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2 \end{cases}$ ...... (I)

2) حل في $I\!R^2$ الجملة التالية :

(II) ..... $\begin{cases} x+y=19 \\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln15 \end{cases}$

✓ الحل

1) مجموعة التعريف الجملة (I) هي مجموعة الثنائيات (x,y) بحيث $x\rangle 0$ و $y\rangle 0$.

$$(I) \ ... \ \begin{cases} xy=4 \ ... \ (1) \\ (Ln\,x)^2+(Ln\,y)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2 \ ... \ (2) \end{cases}$$

من (1) نجد $y=\frac{4}{x}$ نعوضه في (2) نجد $(Ln\,x)^2+\left(Ln\frac{4}{x}\right)^2=\frac{5}{2}(Ln\,2)^2$

بعد التبسيط نجد $2(Ln\,x)^2-(4\,Ln\,2)\times(Ln\,x)+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$ .... (*)

بوضع $Ln(x)=X$ في (*) نجد (**) ... $2X^2-(4\,Ln\,2)X+\frac{3}{2}(Ln\,2)^2=0$

مميز المعادلة (**) هو $\Delta=(2\,Ln\,2)^2$

إذن المعادلة (**) لها حلان هما $X_1=\frac{3}{2}\,Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right)$ و $X_2=\frac{1}{2}Ln\,2=Ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

$Ln\,x=X_1$ يكافئ $x=e^{X_1}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

$Ln\,x=X_2$ يكافئ $x=e^{X_2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=2\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

لما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

و منه مجموعة حلول الجملة (I) هي $S=\{(\sqrt{2} , 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2} , \sqrt{2})\}$

2) (II) .... $\begin{cases} x+y=19 \ .... \ (3) \\ Ln\,x+Ln\,y=2\,Ln\,2+Ln15 \ ..... \ (4) \end{cases}$

مجموعة تعريف الجملة (II) هي $D=(I\!R_+^*)^2$

من (3) نجد $y=19-x$ نعوض y في (4) نجد $Ln\,x+Ln(19-x)=Ln\,4+Ln\,15$

وحسب قواعد جداء اللوغاريتمات نجد $Ln(-x^2+19x)=Ln\,60$

ومنه ينتج $-x^2+19x-60=0$ .... (α)

مميز المعادلة (α) هو $\Delta=121$ ومنه المعادلة (α) لها حلان هما $x_1=4$ ، $x_2=15$

لما $x=4$ فإن $y=19-4=15$ ولما $x=15$ فإن $y=19-15=4$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S'=\{(4\ ,\ 15)\ ,\ (15\ ,\ 4)\}$

تطبيق 19 — تحدب الدالة Ln

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و بحيث من اجل كل عددين حقيقيين a و b من I : $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$ نقول عن f انها محدبة.

1) أ) بين انه من اجل كل $a\rangle 0$ و $b\rangle 0$ يكون $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

ب) استنتج انه من اجل كل $a\rangle 0$ و $b\rangle 0$ يكون

$Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$

2) انشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة $x\mapsto Ln\,x$ معينا عليه نقطتين A و B فاصلتيهما a و b على التوالي.

ما هي وضعية منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى (C_f) ؟

الحل

1) أ) نعلم ان $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ و عليه يكون $a^2+b^2-2ab\geq 0$

بإضافة $4ab$ إلى طرفي المتباينة نجد $a^2+b^2+2ab\geq 4ab$

و بقسمة الطرفين على 4 نجد $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\geq ab$

و بجذر الطرفين نجد $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab}}{2}\geq\sqrt{ab}$

اي : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

ب) لدينا $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ و بما ان الدالة Ln متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

فإن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq Ln\sqrt{ab}$ ولكن :

$Ln\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}Ln(ab)=\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$

إذن $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left[Ln\,a+Ln\,b\right]$

2) إحداثيتا النقطة I منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}\right)$

بما ان $Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{Ln\,a+Ln\,b}{2}$

فإن النقطة $M\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ Ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ من (C_f) تقع فوق النقطة I

وهذا يعني أن الدالة Ln محدبة.

تطبيق 20 — حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f في المكان المعطى.

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x}$ ، $x=0$ ب) $f(x)=\frac{x+Ln\,x}{x}$ ، $x=0$

جـ) $f(x)=\frac{1}{x}-Ln\,x$ ، $x=0$ د) $f(x)=\frac{x}{Ln\,x}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x+1}$ عند $(+\infty)$ و) $f(x)=\frac{Ln(x+1)}{x}$ عند $+\infty$

ن) $f(x)=2x+x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$

الحل

أ) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times Ln\,x=-\infty$

لأن $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to0}Ln\,x=-\infty$

ب) $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{Ln\,x}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0}\frac{Ln\,x}{x}=-\infty$

جـ) $\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to0}-Ln\,x=+\infty$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$

د) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{Ln\,x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{Ln\,x}{x}\right)}=+\infty$

هـ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{x}{x+1}=0$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

و) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}=0$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x+1)}{x+1}=0^+$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$

ن) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{X\to0}\frac{2}{X}+\frac{1}{X}Ln(1+X)=+\infty$$

لأن $\lim_{X\to0}\frac{2}{X}=+\infty$ و $\lim_{X\to0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1$

($X=\frac{1}{x}$ ولما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $X\to0$).

تطبيق 21 حساب النهايات

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f عند أطراف المجال I

أ) $f(x)=x(2-Ln\,x)$ ، $I=]0,+\infty[$

ب) $f(x)=Ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I=]-\infty,-3[$

جـ) $f(x)=\frac{x+2}{Ln\,x}$ ، $I=]1,+\infty[$

د) $f(x)=Ln(x+1)-Ln\,x$ ، $I=]0,+\infty[$

هـ) $f(x)=\frac{x+1}{1-Ln\,x}$ ، $I=]e,+\infty[$

الحل

أ) $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}[2x-x\,Ln(x)]=0$

لأن $\lim_{x\to0}x\,Ln\,x=\overline{0}$ و $\lim_{x\to0}2x=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(2-Ln\,x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=Ln(1)=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x-2}=1$

$\lim_{x\to-3} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x-2}=0^+$

جـ) $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to1}Ln(x)=0^+$ و $\lim_{x\to1}(x+2)=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\frac{Ln\,x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{Ln\,x}{x}}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x}=0^+$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$

د) $\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to0}-Ln\,x=+\infty$ و $\lim_{x\to0}Ln(x+1)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=Ln(1)=0$$

هـ) $\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e}\frac{x+1}{1-Ln\,x}=-\infty$ لأن $\lim_{x\to e}(1-Ln\,x)=\overline{0}$ و $\lim_{x\to e}(x+1)=e+1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-Ln\,x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{Ln(x)\left(\frac{1}{Ln\,x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{Ln\,x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{Ln\,x}-1}=-\infty$$

تطبيق 22 حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

عين في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f في المكان المعطى

أ) $f(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x+1+Ln(x+2)}{x+1}$ عند -1 ، د) $f(x)=\frac{Ln(x)-1}{x^2-1}$ عند 1

الحل

أ) $\lim_{x\to1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Ln\,x$ تكون $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند 1

و لدينا $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$

من اجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$ ومنه $g'(1)=1$ اذن $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times 0$ حالة عدم التعيين

بوضع $X=\frac{1}{x}$ تكون $f(x)=\frac{Ln(1+X)}{X}$ و لما $x\to+\infty$ فإن $X\to 0$

بوضع $g(X)=Ln(1+X)$ تصبح $\frac{Ln(1+X)}{X}=\frac{g(X)-g(0)}{X-0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و لدينا $\lim_{X\to 0}\frac{g(X)-g(0)}{X-0}=g'(0)$

و لكون $g'(X)=\frac{1}{X+1}$ نجد $g'(0)=1$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=g'(0)=1$

جـ) $\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=x+1+Ln(x+2)$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند -1

إذن $\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)$.

من اجل كل x من $]-2,+\infty[$ لدينا $g'(x)=1+\frac{1}{x+2}$

ومنه $g'(-1)=2$ إذن $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=2$

د) $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x)=Ln(x)-1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{1}{x}$

ومنه $g'(1)=1$ اذن $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=1$ و $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

تطبيق 23 المستقيم المقارب المائل ووضعيته بالنسبة لمنحني

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+3-\frac{Ln\,x}{x}$

1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة (Δ)

✓ الحل

1) حتى يكون (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) يجب أن يكون $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-Ln\,x}{x}=0$$

اذن $(\Delta): y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

2) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس اشارة $d(x)$

حيث $d(x)=f(x)-(x+3)$.

$$d(x)=f(x)-(x+3)=\frac{-Ln(x)}{x}$$

$d(x)=0$ يكافئ $Ln(x)=0$ يكافئ $x=1$

إذا كان $x\rangle 1$ فإن $d(x)\langle 0$ ومنه (Δ) يقع فوق (C_f)

وإذا كان $0\langle x\langle 1$ فإن $d(x)\rangle 0$ ومنه (Δ) يقع تحت (C_f)

(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(1,4)$.

تطبيق 24 دراسة قابلية الاشتقاق

1) f دالة معرفة على $I=[-1,+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)^2\,[1-Ln(x+1)] & ; x\rangle -1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=-1$

2) g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{Ln\,x}{x-1}$

إذا كان $x\neq 1$ و $g(1)=0$ ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند 1.

✓ الحل

1) حتى تقبل الدالة f الاشتقاق عند $x=-1$ يجب أن يكون $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\ell$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+1)[1-Ln(x+1)]$$

$$=\lim_{x\to -1}[(x+1)-(x+1)Ln(x+1)]=0=\ell$$

اذن f قابلة للاشتقاق عند العدد -1.

2) حتى تقبل الدالة g الاشتقاق عند 1 يجب أن يكون $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\ell$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{Ln\,x}{x-1}\times\frac{1}{x-1}=1\times(\infty)=\infty$$

ومنه الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

تطبيق 25 — مشتق الدالة المركبة

في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من I ثم أحسب $f'(x)$.

ا) $f(x)=Ln(2+x^2)$ ، $I=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ، $I=]1,+\infty[$

جـ) $f(x)=x-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، $I=]0,+\infty[$

د) $f(x)=Ln(Ln\,x)$ ، $I=]1,+\infty[$

✓ الحل

ا) الدالة $x\xrightarrow{u}2+x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x)>0$ ومنه الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{2x}{2+x^2}$

ب) الدالة $u: x\mapsto\frac{x+1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $]1,+\infty[\subset D_u$

ومن أجل كل x من $]1,+\infty[$ يكون $u(x)>0$.

إذن الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}$

جـ) الدالة u ، $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $u(x)>0$ ومنه الدالة $Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا $(Ln\,o\,u)'(x)=\frac{-1}{x(x+1)}$

- الدالة $x\xrightarrow{f_1}-x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وهما $x\mapsto -x$ و $x\mapsto Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

هما $x\mapsto f_1(x)$ و $x\mapsto x$ ومن أجل كل x من $]0,+\infty[$ لدينا ،

$$f'(x)=1-\left[Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(x+1)}\times x\right]=1-Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}$$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}Ln\,x$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$.

و من أجل كل x من $]1,+\infty[$ لدينا $u(x)>0$

ومنه الدالة $f=Ln\,o\,u$ قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=u'(x)\times Ln'(u(x))=\frac{1}{x}\times\frac{1}{Ln\,x}=\frac{1}{x\,Ln\,x}$

تطبيق 26 — حل معادلات و متراجحات

في كل حالة من الحالات التالية حل المتراجحات والمعادلات ذات المجهول x .

ا) $2^x\le 100$ ، x عدد طبيعي ، ب) $4^x=10000$ ، x عدد حقيقي

جـ) $(0,25)^x=1$ ، x عدد حقيقي ، د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ ، x عدد حقيقي

✓ الحل

ا) $2^x\le 100$ يكافئ $Ln(2^x)\le Ln(100)$

يكافئ $x\,Ln(2)\le Ln(100)$

يكافئ $x\le\frac{Ln(100)}{Ln(2)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (ا) هي $\{66 , ... , 1 , 0\}$

ب) $4^x=10000$ يكافئ $x\,Ln(4)=Ln(10000)$ يكافئ $x=\frac{Ln(10000)}{Ln(4)}$

جـ) $(0,25)^x=1$ يكافئ $x\,Ln(0,25)=0$ يكافئ $x=0$

د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\le 0,2$ يكافئ $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)\le Ln(0,2)$ يكافئ $x\ge\frac{Ln(0,2)}{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $\left]\frac{Ln(0,2)}{Ln(\frac{2}{3})},+\infty\right[$

تطبيق 27 حصر أعداد بواسطة قوة العدد 10

إذا علمت أن $Log\, a = 4,42$ و $Log\, b = 3,68$ اعط حصرا للعددين a و b بواسطة قوى للعدد 10 ثم حصرا للأعداد $a\,b$ ، $\frac{a}{b}$ ، a^2 ، a^3

الحل

- من المتباينة $5 \rangle Log\, a \geq 4$ ينتج $10^5 \rangle a \geq 10^4$

من المتباينة $4 \rangle Log\, b \geq 3$ ينتج $10^4 \rangle b \geq 10^3$

- لدينا $Log\, a - Log\, b = 0,74$ اي $Log \frac{a}{b} = 0,74$

و بما ان $1 \rangle Log\frac{a}{b} \geq 0$ فإن $10^1 \rangle \frac{a}{b} \geq 10^0$

- لدينا $Log\, a^2 = 2\, Log\, a = 8,84$ إذن $9 \rangle Log\, a^2 \geq 8$ و عليه $10^9 \rangle a^2 \geq 10^8$
- لدينا $Log(a\,b) = Log\,a + Log\,b = 8,10$ إذن $9 \rangle Log(a\,b) \geq 8$

و عليه يكون $10^9 \rangle a\,b \geq 10^8$

- لدينا $Log\,a^3 = 3\,Log\,a = 13,26$ إذن $14 \rangle Log\,a^3 \geq 13$ وعليه يكون $10^{14} \rangle a^3 \geq 10^{13}$

تطبيق 28 الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و يختلف عن 1 و لتكن g دالة معرفة من اجل $x \rangle 0$ بالعبارة $g(x) = \frac{Ln\,x}{Ln\,a}$

1) احسب $g(a)$ ثم بين ان $g(b\times c) = g(b) + g(c)$

2) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها حسب قيم a.

3) ليكن (γ_a) المنحنى البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ارسم (γ_e) ، $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ ، (γ_2) في نفس المعلم

الحل

1) $g(a) = \frac{Ln\,a}{Ln\,a} = 1$

$$g(b\times c) = \frac{Ln(b\times c)}{Ln\,a} = \frac{Ln\,b + Ln\,c}{Ln\,a} = \frac{Ln\,b}{Ln\,a} + \frac{Ln\,c}{Ln\,a} = g(b) + g(c)$$

إذن كل الخواص المتعلقة بالدالة Ln تبقى صحيحة بالنسبة إلى الدالة g.

2) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0\,,+\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x\,Ln\,a}$

حالة $a \rangle 1$

- إذا كان $a \rangle 1$ فإن $Ln\,a \rangle 0$ ومنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $g'(x) \rangle 0$

و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$+$
تغيرات g	$-\infty$	↗ $+\infty$

- حالة $1 \rangle a \rangle 0$
- الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x) = \frac{1}{x\,Ln(a)}$

بما ان $Ln\,a \langle 0$ فإنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $g'(x) \langle 0$

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$
تغيرات g	$+\infty$	↘ $-\infty$

3) (γ_e) له مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

(γ_e) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(1,0)$ و يمر أيضا من النقطة $(e,1)$.

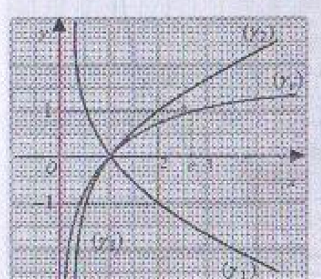
- $(\gamma_{\frac{1}{2}})$ يمر من النقطة $(1,0)$ والنقطة $(2,-1)$.

و له مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

- (γ_2) يمر من النقطتين $(1,0)$ و $(2\,,1)$

$(\gamma_{\frac{1}{2}})$ هو نظير (γ_2) بالنسبة إلى محور الفواصل

وبصفة عامة $(\gamma_{\frac{1}{a}})$ نظير (γ_a) بالنسبة إلى محور الفواصل.



تطبيق 29 رسم التمثيل البياني لدالة

f دالة معرفة على المجال $]-1,1[$ بالعبارة $f(x) = Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1) بين أن الدالة f فردية.

2) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

3) ادرس تغيرات الدالة f على $[0,1[$ ثم ارسم منحناها.

✓ الحل

1) f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من اجل كل x من $]-1,1[$ فإن $-x$ من $]-1,1[$ و $f(-x)=-f(x)$

إذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $-x\in]-1,1[$

و $f(-x)=Ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)=Ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}}\right)=-Ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$ ومنه f فردية.

2) الدالة $u: x\mapsto\frac{x+1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و لدينا $u(x)>0$

ومنه الدالة $f=Ln\,ou$ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$

3) دراسة تغيرات f على $[0,1[$

$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ و $f(0)=0$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ و لدينا $f'(x)=\frac{2}{(1+x)(1-x)}$

من أجل كل x من $[0,1[$ يكون $f'(x)>0$ منه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1[$

بما أن الدالة f فردية نرسم بيانها على المجال $[0,1[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ $O(0,0)$

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$

x	0		1
إشارة $f'(x)$		+	
تغيرات f	0	↗	$+\infty$

تطبيق 30 — دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

1) f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x)-x$

أ) ادرس تغيرات الدالة f.

ب) احسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.

2) أ) باستعمال السؤال 1) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=(Ln\,x)^2-2x$

ب) ارسم (γ) بيان الدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

✓ الحل

1) أ) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{Ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

- إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)<0$ ومنه f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	−	
تغيرات f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

- إذا كان $0<x<1$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]0,1]$

ب) من جدول تغيرات f نستنتج أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ يكون $f(x)\le 0$.

2) أ) دراسة تغيرات g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{2}{x}Ln\,x-2$

ومنه $g'(x)=\frac{2}{x}(Ln(x)-x)$ أي $g'(x)=\frac{2}{x}\times f(x)$

$g'(x)=0$ يكافئ $f(x)=0$ يكافئ $x=1$

من أجل كل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ يكون $g'(x)<0$

إذن $g'(x)$ سالب و ينعدم عند $x=1$ منه الدالة g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$

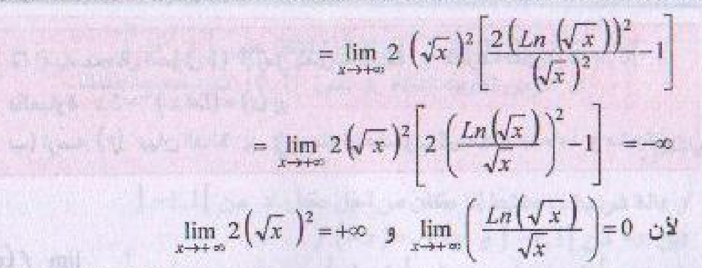
$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty-\infty$ عدم التعيين.

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim\left(Ln(\sqrt{x})^2\right)^2-2(\sqrt{x})^2$

$=\lim_{x\to+\infty} 4\left(Ln(\sqrt{x})\right)^2-2(\sqrt{x})^2$

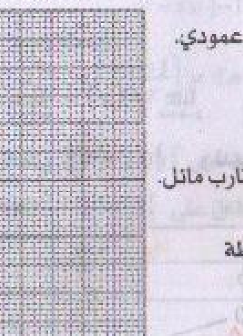
x	0		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		−	0	−	
تغيرات g	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$



$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[\frac{2\left(Ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}-1\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2\left[2\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2-1\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{Ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} 2\left(\sqrt{x}\right)^2=+\infty$



ب) للمستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-2$

و $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)+2x\right)=+\infty$

إذن المنحني (C_f) ليس له مستقيم مقارب مائل.

- بما أن $g'(x)$ ينعدم عند $x=1$

و لا يغير إشارته في جوار 1 فإن النقطة $A(1,-2)$ نقطة إنعطاف لـ (C_g)

و المماس عندها يخترق المنحنى (C_g)

تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بالعبارة التالية:

$$f(x)=x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (γ) الممثل للدالة f.

ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم بالتدقيق (γ) و (Δ) في نفس المعلم.



الحل

1) $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to1} Ln\frac{x}{x-1}=+\infty$ و $\lim_{x\to1}(x-2)=-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

اتجاه تغير f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x^2-x-2=0$ يكافئ $(x=-1)$ أو $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى I و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على I هي نفس إشارة (x^2-x-2)

- إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $]1,2[$
- إذا كان $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $[2,+\infty[$

$f(2)=2Ln(2)$

$f(2)\approx 1,38$

x	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات f	$+\infty$ ↘	$f(2)$	↗ $+\infty$

2) أ) معادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب لـ (γ) إذا و فقط إذا كان:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

ب) لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على I.

$$f(x)-(x-2)=2Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x\in I$ يكون $x>x-1$

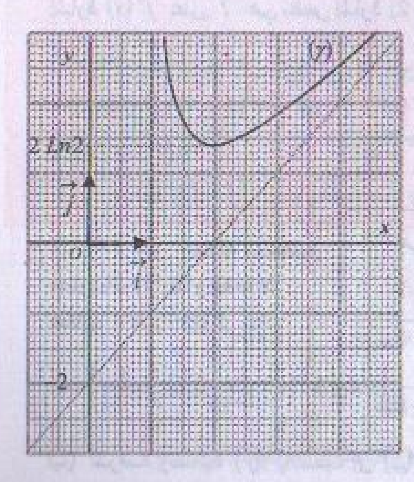
بالقلب نجد $\frac{x}{x-1}>1$ و منه ينتج

$$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>Ln(1)$$

أي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)>0$

إذن $f(x)-(x-2)>0$

و هذا يعني أن المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)



تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $I =]1,+\infty[$ بالعبارة التالية:

$$f(x) = x - 2 + 2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (γ) الممثل للدالة f

ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (γ) و (Δ) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 1} Ln\,\frac{x}{x-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x-2) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$

اتجاه تغير f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x) = \frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x^2 - x - 2 = 0$ يكافئ $(x=-1)$ او $(x=2)$

$x=-1$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى I و بالتالي $f'(2)=0$

إشارة $f'(x)$ على I هي نفس إشارة (x^2-x-2)

- إذا كان $x \in]1,2[$ فإن $f'(x) < 0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $]1,2[$
- إذا كان $x \in]2,+\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $]2,+\infty[$.

$f(2) = 2\,Ln(2)$

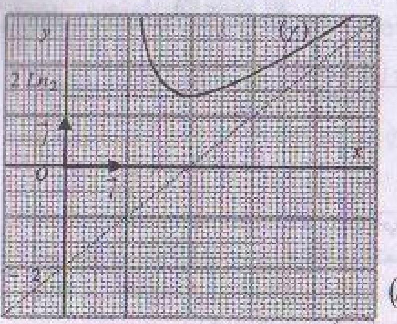
$f(2) \approx 1,38$

x	1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

2) أ) $y = x - 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (γ) إذا و فقط إذا كان: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-x+2\right] = \lim_{x\to+\infty} 2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

ب) للدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-2)$ على I.



$$f(x)-(x-2) = 2\,Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من اجل كل $x \in I$ يكون $x > x-1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1} > 1$ و منه ينتج

$Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > Ln(1)$ اي $Ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

إذن $f(x)-(x-2) > 0$

و هذا يعني ان المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (Δ)

تطبيق 32 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ $f(0)=1$ و من اجل $x > 0$:

$$f(x) = \frac{Ln(1+x)}{x}.$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ:

$$g(x) = Ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج ان من اجل كل x من $[0,+\infty[$ يكون:

$$Ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

جـ) بطريقة مماثلة بين انه إذا كان $x \ge 0$ فإن $Ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$

د) تحقق ان من اجل كل $x > 0$ يكون $-\frac{1}{2} \le \frac{Ln(1+x)-x}{x^2} \le \frac{-1}{2} + \frac{x}{3}$

هـ) استنتج ان f قابلة للاشتقاق عند الصفر و ان $f'(0) = \frac{-1}{2}$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$ عدم التعيين.

يوضع $\kappa(x) = Ln(1+x)$ نجد $\kappa(0) = 0$ و منه $\frac{Ln(1+x)}{x} = \frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}$

الدالة κ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند الصفر

ومنه $\lim_{x\to0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=\kappa'(0)$ لكن $\kappa'(x)=\frac{1}{1+x}$ إذن $\kappa'(0)=1$

وعليه $\lim_{x\to0}\frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$ مما يفسر أن f مستمرة من اليمين عند 0.

2) أ) g قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{1}{x+1}-(1-x+x^2)=\frac{-x^3}{x+1}$

بما أن $x\ge0$ فإن $g'(x)\le0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0,+\infty[$.

ب) بما أن $g(0)=0$ و g متناقصة تماما على $[0,+\infty[$

فإنه من أجل كل $x\in[0,+\infty[$ يكون $g(x)\le0$

وهذا يعني أن $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]\le0$ أي $Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

جـ) نضع $d(x)=Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]$

ندرس اتجاه تغير d على $I=[0,+\infty[$

الدالة d قابلة للاشتقاق على I

و أنه من أجل كل x من I لدينا $d'(x)=\frac{x^2}{1+x}$

بما أن $x\ge0$ فإن $\frac{x^2}{x+1}\ge0$

وهذا يعني أن $d'(x)\ge0$ إذن فإن الدالة d متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

بما أن $d(0)=0$ و d متزايدة تماما على I

فإنه من أجل كل $x\ge0$ لدينا $d(x)\ge0$

أي $Ln(1+x)-\left[x-\frac{x^2}{2}\right]\ge0$ وهذا يعني أن $Ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}$

د) من السؤالين (ب) و (جـ) نجد $x-\frac{x^2}{2}\le Ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

بإضافة $-x$ نجد $-\frac{x^2}{2}\le Ln(1+x)-x\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

وبالقسمة على x^2 نجد $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

هـ) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{Ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}$

بما أن $-\frac{1}{2}\le\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ و $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج $\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

وبالتالي $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

تطبيق 33 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على المجال $]3,+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)Ln(x-3)$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1cm)

1) تحقق أنه من أجل $x>3$ يكون $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) احسب $f''(x)$ حيث f'' المشتق الثاني للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير f'.

3) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]3,+\infty[$.

4) أ) ادرس نهاية f عند أطراف المجال $]3,+\infty[$ ثم حدد المستقيمات المقاربة لـ (γ).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

5) عين نقط تقاطع (γ) مع (xx') ثم ارسم (γ).

الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+Ln(x-3)$

2) الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و لدينا $f''(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=7$

إذا كان $x>7$ فإن $f''(x)>0$ بالتالي f' متزايدة تماما على $]7,+\infty[$.

إذا كان $3<x<7$ فإن $f''(x)<0$ و بالتالي f' متناقصة تماما على $]3,7]$.

3) بما أن $f''(x)$ موجبة على $]7,+\infty[$ و سالبة على $]3,7[$ و $f''(7)=0$ فإن الدالة f' لها قيمة حدية صغرى هي $f'(7)$ على المجال $]3,+\infty[$.

بالتالي من أجل كل $x\in]3,+\infty[$ يكون $f'(x)\ge f'(7)$

و بما أن $f'(7)=\frac{8}{2}+2Ln(2)$ أي $f'(7)>0$ فإن $f'(x)>0$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}Ln(x-3)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}Ln(x-3)=+\infty$

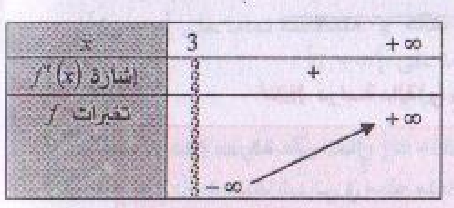
لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty} Ln(x-3)=+\infty$

إذن المنحني (γ) ليس له مستقيم مقارب في جوار $(+\infty)$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 3} Ln(x-3)=-\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 3} (x+1)=4$

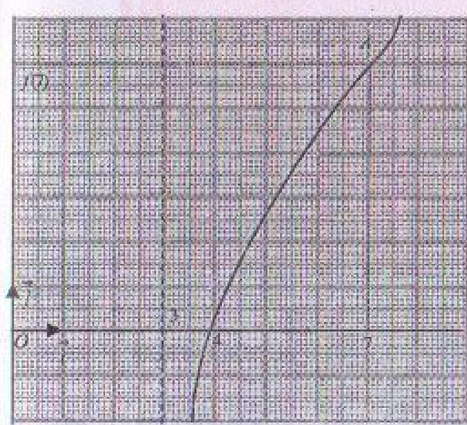
إذن (γ) له مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$

ب) بما ان $f'(x)$ موجبة تماما على $]3,+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]3,+\infty[$



x	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	
تغيرات f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5) فاصلة نقطة التقاطع المنحني (γ) مع (xx') هي حل المعادلة $f(x)=0$.



$f(x)=0$ يكافئ $(x+1)=0$

او $Ln(x-3)=0$ و $x > 3$

يكافئ $(x=-1)$ او $(x-3=1)$ و $x > 3$

يكافئ $(x=-1)$ او $(x=4)$ و $x > 3$

إذن $f(x)=0$ يكافئ $(x=4)$.

و عليه (γ) يقطع (xx') في النقطة $(4,0)$

بما ان $f''(x)$ ينعدم عند 7 مغيرا إشارته في جوار 7 فإن النقطة $A(7,f(7))$ نقطة انعطاف للمنحني (γ)

$f(7)=8\,Ln(4)=16\,Ln(2)$

تطبيق 34 دراسة دالة و حل المعادلات

I) نعتبر g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\,Ln\,x$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

II) f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-(Ln\,x)^2$

1) بين انه من اجل كل $x > 0$ يكون $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

2) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و عند الصفر.

3) باستعمال الفرع I) ادرس تغيرات الدالة f. ثم ارسم (γ) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 5 cm)

III) 1) بين ان المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,1[$.

2) بين ان المعادلة $f(x)=\frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]1,+\infty[$.

3) ا) بين ان $\alpha\beta=1$

ب) عين حصرا لـ β بتقريب $0,001$ ثم استنتج حصرا لـ α.

✓ الحل

I) 1) $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[x^4-1-4x(x\,Ln\,x)\right]=-\infty$

لأن $\lim_{x\to 0} xLn(x)=0$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x^2}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[1-\frac{1}{x^4}-4\frac{Ln\,x}{x}\times\frac{1}{x}\right]=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{Ln(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}=0$

اتجاه تغير g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $g'(x)=\frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$

$g'(x)=0$ يكافىء $x=1$ أو $x=-1$

بما ان $x > 0$ فإن للمعادلة $g'(x)=0$ حلا وحيدا $x=1$

من اجل كل $x > 0$ و $x\neq 1$ لدينا $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	0	$+$
تغيرات g	$-\infty$ ↗		$+\infty$

2) $g(1)=0$

إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > 0$ وإذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < 0$

II) 1) من أجل كل $x > 0$ لدينا :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{4}+\frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\left(Ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2=\frac{1}{4x^2}+\frac{x^2}{4}-(-Ln\,x)^2$$

$$=\frac{1}{4x^2}+\frac{x^2}{4}-(\ln x)^2=f(x)$$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4x^4}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right]=+\infty$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty-\infty$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}-(x\ln x)^2\right]=+\infty$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2x}g(x)$

$f'(x)=0$ يكافىء $x=1$

- بما ان من اجل كل $1 \langle x$ يكون $g(x)\rangle 0$ فإن $f'(x)\rangle 0$
- و إذا كان $0\langle x\langle 1$ فإن $g(x)\langle 0$ و منه $f'(x)\langle 0$

إذن f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$ و متناقصة تماما على $]0,1]$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات f	$+\infty$ ↘	$f(1)$	↗ $+\infty$

III) 1) نضع $h(x)=f(x)-x$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0,1[$

و لدينا $h'(x)=f'(x)-1$

- بما ان $f'(x)\langle 0$ على المجال $]0,1[$

فإن $h'(x)\langle 0$ على $]0,1[$ و $h(]0,1[)=\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$

- بما ان $0\in\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ فإن للمعادلة $h(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0,1[$

بما ان $h(\alpha)=0$ فإن $f(\alpha)=\alpha$

2) نضع $k(x)=f(x)-\frac{1}{x}$

الدالة k قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و لدينا $k'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}$

بما ان $f'(x)\rangle 0$ على المجال $]1,+\infty[$ فإن $k'(x)\rangle 0$

بما ان $k(]1,+\infty[)=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و $0\in\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$

فإن للمعادلة $k(x)=0$ حلا وحيدا β من $]1,+\infty[$ اي $f(\beta)=\frac{1}{\beta}$

3) أ) لدينا $f(\alpha)=\alpha$ و $f(\beta)=\frac{1}{\beta}$

بما ان $\beta\rangle 1$ فإن $\frac{1}{\beta}\langle 1$

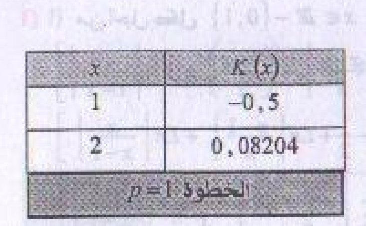
لدينا $f(\beta)=f\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}$

إذن $f\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}$ و $f(\alpha)=\alpha$

وبما ان للمعادلة $f(x)=x$ حلا وحيدا

فإن $\frac{1}{\beta}=\alpha$ اي $\alpha\beta=1$

ب) نستعمل طريقة المسح لتحديد المجال $]a,b[$ الذي ينتمي اليه β في المرحلة الأولى ، ثم نستعمل طريقة ديكتومي لتحديد حصر ادق .



x	$K(x)$
1	$-0,5$
2	$0,08204$
الخطوة $p=1$	

من الجدول المجاور نستنتج ان $\beta\in]1,2[$

$k\left(\frac{3}{2}\right)=-0,15080\langle 0$

$k(1,75)=-0,027243\langle 0$

$k(1,875)=0,10916\rangle 0$ إذن $\beta\in]1,750,1,875[$

- بما ان $\beta\in]1,750,1,875[$ و الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ متناقصة على المجال $]1,750,1,875[$

فإن $\frac{1}{\beta}\in\left]\frac{1}{1,875},\frac{1}{1,750}\right[$ اي $\alpha\in\left]\frac{1}{1,875},\frac{1}{1,750}\right[$

ومنه $\alpha\in]0,533\ ,\ 0,571[$

تطبيق 35 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0,1\}$ بالعبارة $f(x)=-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) بين انه من اجل كل $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ فإن:

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(1-x)\right]=-\frac{1}{4}$$

ب) استنتج ان النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحني (γ).

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجالين $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (γ)

ثم حدد الوضع النسبي للمنحني (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

ب) ارسم (γ) و (Δ) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) أ) من اجل كل $x\in \mathbb{R}-\{0,1\}$:

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(1-x)\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\left(\frac{1-x}{2}\right)+Ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+Ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln\left|\frac{x-1}{x}\times\frac{x}{x-1}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+Ln|1|\right]=-\frac{1}{4}$$

ب) لدينا $\frac{1}{2}\left[f(x)+f(1-x)\right]=-\frac{1}{4}$ .... (*)

$A(a,b)$ مركز تناظر لـ (γ) إذا وفقط إذا كان $f(2a-x)=2b-f(x)$

اي $\frac{1}{2}\left[f(x)+f(2a-x)\right]=b$

من العلاقة (*) نستنتج ان $b=-\frac{1}{4}$ و $a=\frac{1}{2}$ ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ (γ)

2) دراسة تغيرات الدالة f على $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$

x		-1		0		1		2	
$-(x+1)(x-2)$	-	0	+		+		+	0	-
$2x(x-1)$	+		+	0	-	0	+		+
$\frac{-(x-1)(x+2)}{2x(x-1)}$	-	0	+	‖	-	‖	+	0	-

إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ أو $x\in]2,+\infty[$ فإن $f'(x)<0$

إذا كان $x\in]1,2[$ فإن $f'(x)>0$

حساب النهايات :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^{+}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x-1}{x}\right|=0^{+}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x-1}{x}\right|=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)=-\infty$

جدول تغيرات f على $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

x	$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	‖	+	0	-	
تغيرات f	$\frac{-1}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-1-Ln(2)$	↘	$-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty} Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=Ln(1)=0$$

ومنه $y=\frac{-x}{2}$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

- لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة المقدار $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)$ على $\left[\frac{1}{2},1\right[\cup]1,+\infty[$

لدينا $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

. إذا كان $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

بما ان $1-x<x$ فإن $\frac{1-x}{x}<1$ ومنه $Ln\left(\frac{1-x}{x}\right)<0$

اي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

. إذا كان $x\in]1,+\infty[$ فإن $f(x)-\left(\frac{-x}{2}\right)=Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

بما ان $x-1<x$ فإن $\frac{x-1}{x}<1$

اي $Ln\left(\frac{x-1}{x}\right)<0$

ومنه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $]1,+\infty[$

صورة (Δ) بالتناظر المركزي الذي مركزه A هو المستقيم (Δ).

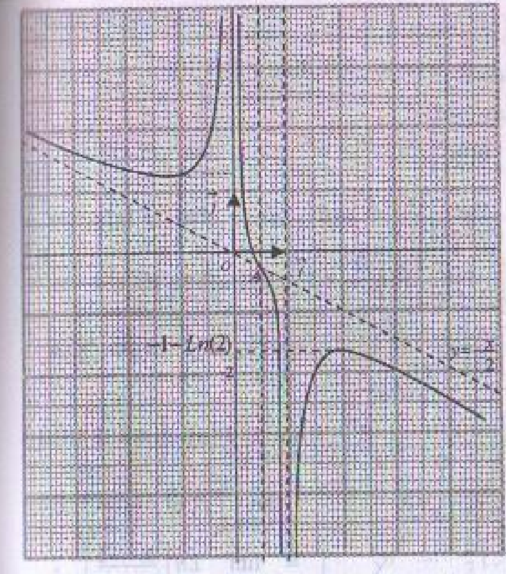
صورة المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{1}{2}$ هو نفسه.

صورة النقطة $\left(2,-1-Ln(2)\right)$ هي النقطة $\left(-1,\ \frac{1}{2}+Ln(2)\right)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$$
$$=-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



تطبيق 36 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

I) g دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-Ln(1+x^2)$

1) بين أنه على المجال $]1,+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ثم حدد حصرا له بتقريب $0,1$.

2) عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

II) f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ
$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x}, & x>0 \end{cases}$$

1) أ) ما هي نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ لما x يؤول إلى 0 ؟

ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ثم أوجد معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ للمنحنى البياني (γ) الممثل لـ f

2) بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون $f(x)=\frac{2Lnx}{x}+\frac{1}{x}Ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$

3) أ) بين أنه من أجل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج تغيرات f.

ب) بين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم (T) و (γ)

✓ الحل

I) 1) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و لدينا $g'(x)=\frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $x>1$ لدينا $g'(x)<0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$

وبالتالي $g(]1,+\infty[)=]-\infty\ ,\ 1-Ln2[$

بما أن $g'<0$ و $0\in]-\infty\ ,\ 1-Ln2[$

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]1,+\infty[$

- تعيين حصر لـ α

باستعمال طريقة المسح نجد أن $\alpha\in]1,2[$ نحسب $g\left(\frac{1+2}{2}\right)$ أي $g(1,5)$

$g(1,5)=0,206>0$ ومنه $\alpha\in]1,5\ ,2[$

2) تعيين إشارة $g(x)$

بما أن g متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$ و $g(\alpha)=0$ و $g(1)>0$ فإن:

إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$ يكون $g(x)<0$

وإذا كان $x\in]1,\alpha[$ يكون $g(x)>0$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0,1]$ و $g(0)=0$ و $g(1)>0$

فإنه من أجل كل $x\in]0,1[$ يكون $g(x)>0$

x	0		1		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$	0		+		0	−	

II)
$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\frac{Ln(1+x^2)}{x}, & x>0 \end{cases}$$

1) أ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{X\to 0}\frac{Ln(1+X)}{X}=1=\ell$$

حيث $X=x^2$

ب) بما أن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ تساوي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

و بالحساب نجد $y=x$.

2) من اجل كل $x>0$ لدينا $f(x)=\dfrac{2Ln(x)}{x}+\dfrac{1}{x}\times Ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

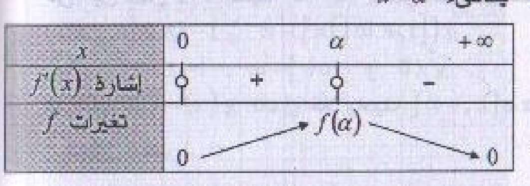
- بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2Ln(x)}{x}=0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) أ) من اجل كل $x>0$ لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

$f'(x)=0$ يكافىء $g(x)=0$ يكافىء $x=\alpha$



x	0		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	0	+	0	-	
تغيرات f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

إذا كان $x\in]0,\alpha[$

فإن $f'(x)>0$

و بالتالي f متزايدة تماما

على $[0,\alpha]$

و إذا كان $x\in]\alpha,+\infty[$

فإن $f'(x)<0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]\alpha,+\infty[$

ب) بما ان $g(\alpha)=0$ فإن $\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}-Ln(\alpha^2+1)=0$

اي $\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}=Ln(\alpha^2+1)$

$$f(\alpha)=\frac{Ln(\alpha^2+1)}{\alpha}=\frac{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha}=\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$$

نضع $L(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

الدالة L قابلة للاشتقاق على $]1,5\ ,2[$

ولدينا $L'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ومن اجل كل x من $]1,5\ ,2[$

لدينا $L'(x)<0$

اي L متناقصة تماما على $]1,5\ ,2[$

وعليه $L(]1,5\ ,2[)=]0,75,\ 0,923[$

و بما ان $L(\alpha)=f(\alpha)$

فإن $f(\alpha)\in]0,75,\ 0,923[$

للستقيم ذو المعادلة $y=0$

مقارب لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

تطبيق 37 عائلة المنحنيات

n عدد طبيعي غير معدوم و f_n دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بالعبارة $f_n(x)=x^n Ln(x+1)$ و (γ_n) المنحنى للمثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول $2\,cm$)

1) لتكن h_n دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $h_n(x)=n\,Ln(1+x)+\dfrac{x}{x+1}$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h_n

ب) احسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على $]-1,+\infty[$

2) أ) تحقق انه من اجل كل $x\in]-1,+\infty[$ لدينا ،

$f_n'(x)=x^{n-1}\times h_n(x)$ مع $n\geq 2$

ب) نضع $n=1$ تحقق ان $f_1'(x)=h_1(x)$ ثم بين ان $f_1'(x)$ و $h_1(x)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]-1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f_2

3) أ) بين ان جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطة ثانية يطلب تعيينها.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2) في نفس المعلم.

✓ الحل

1) أ) دراسة اتجاه تغير h_n :

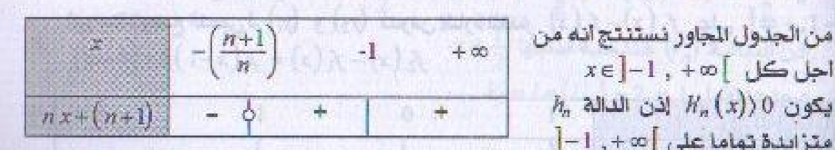
الدالة h_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

و لدينا $h_n'(x)=\dfrac{nx+(n+1)}{(x+1)^2}$

فالمعادلة $h_n'(x)=0$ لها حل وحيد هو $x=-\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

بما ان $-\left(\dfrac{n+1}{n}\right)<-1$ فإن المعادلة $h_n'(x)=0$ ليس لها حلولا في $]-1,+\infty[$

و إشارة $h_n'(x)$ هي نفس إشارة $nx+(n+1)$



x	$-\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$		-1		$+\infty$
$nx+(n+1)$	-	0	+		+

من الجدول المجاور نستنتج انه من اجل كل $x\in]-1,+\infty[$ يكون $h_n'(x)>0$ إذن الدالة h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$

ب) بما ان $h_n(0)=0$ فانه إذا كان $x\in]-1,0[$ يكون $h_n(x)<0$

و إذا كان $x\in]0,+\infty[$ يكون $h_n(x)>0$

2) ا) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ ولدينا $f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$

ب) من اجل $n=1$ نجد $f_1'(x) = h_1(x)$

وبالتالي إشارة $f_1'(x)$ هي نفس إشارة $h_1(x)$

$$\lim_{x \to -1} f_1(x) = \lim_{x \to -1} x\,Ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

x	-1		0		$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$	‖	-	0	+	
تغيرات f_1	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

جـ) من اجل $n=2$:

$$f_2'(x) = x\,h_2(x)$$

$$f_2'(0) = 0$$

إذا كان $x > 0$ فإن $f_2'(x) > 0$

وإذا كان $-1 < x < 0$ فإن $f_2'(x) > 0$

$$\lim_{x \to -1} f_2(x) = \lim_{x \to -1} x^2 Ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 Ln(x+1) = +\infty$$

x	-1		0		$+\infty$
إشارة $f_2'(x)$	‖	+	0	+	
تغيرات f_2	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3) ا) $M_0(x_0, y_0)$ تنتمي إلى (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) مع $n_1 \neq n_2$

هذا معناه أن :

$$y_0 = x_0^{n_1} Ln(x_0+1)$$

و $y_0 = x_0^{n_2} Ln(x_0+1)$

ومنه ينتج $x_0^{n_1} Ln(x_0+1) = x_0^{n_2} Ln(x_0+1)$

وبالتبسيط نجد $(Ln(x_0+1))(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) = 0$

اي $(Ln(x_0+1)) = 0$ لأن $(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) \neq 0$

$Ln(x_0+1) = 0$ يكافئ $x_0 = 0$ و عليه $y_0 = 0$

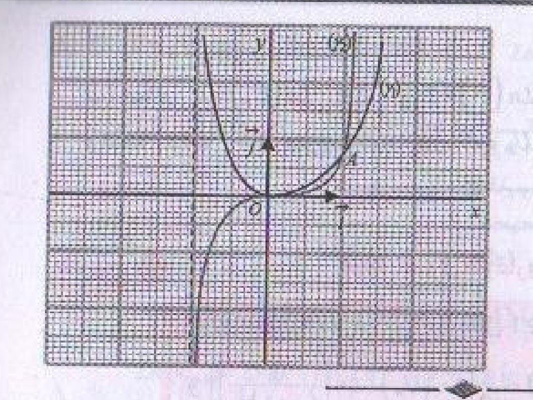
إذن النقطة $O(0,0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (γ_n).

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2)

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس اشارة المقدار $f_2(x) - f_1(x)$ على $]-1,+\infty[$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)Ln(1+x)$$

x	-1		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$	‖	+	0	-	0	+	
$Ln(1+x)$	‖	-	0	+		+	
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	-	0	-	0	+	



- المنحني (γ_2) يقطع المنحني (γ_1) في النقطة $O(0,0)$ و يقطعه أيضا في النقطة $A(1, Ln(2))$

- إذا كان $x > 1$ فإن (γ_2) يقع فوق (γ_1)

- إذا كان $x \in]-1,1[$ فإن (γ_2) يقع تحت (γ_1)

تطبيق 38 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$$

(V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n = Ln(U_n) - 2$

1) بين ان المتتالية (V_n) هندسية معينا حدها الأول V_0 و أساسها r.

2) استنتج عبارة V_n و $Ln(U_n)$ بدلالة n.

3) ا) ما هي نهاية (V_n) ؟

ب) استنتج ان المتتالية (U_n) متقاربة نحو e^2.

✓ الحل

1) (V_n) هندسية معناه انه يوجد r من $\mathbb{R}^*$ بحيث من اجل كل n لدينا $V_{n+1} = V_n \times r$

$$V_{n+1} = Ln(U_{n+1}) - 2 = Ln\left(e\sqrt{U_n}\right) - 2 = Ln(e) + Ln\left(\sqrt{U_n}\right) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}Ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2}\left(Ln(U_n) - 2\right) = \frac{1}{2}V_n$$

إذن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $V_0 = Ln(U_0) - 2 = 1$

2) $V_n = V_0 \times r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$Ln(U_n) = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

3) أ) $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$ لأن $1 > \frac{1}{2} > 0$

ب) بما ان $\lim_{n \to +\infty} Ln\left(U_n\right) = 2$ و $Ln\left(e^2\right) = 2$

و الدالة $x \mapsto Ln\, x$ متزايدة تماما فإن $\lim_{n \to +\infty} U_n = e^2$

تطبيق 39 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل $n \geq 1$ بـ $U_1 = 2$

و $Ln\left(U_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left[Ln\left(U_n\right) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$

1) بين ان هذه المتتالية معرفة و ان جميع حدودها اصغر من او يساوي 2 .

2) من اجل كل $n \geq 1$ نعرف المتتاليتين (V_n) و (W_n) بـ $V_n = n \times U_n$ و $W_n = Ln\left(V_n\right)$

اوجد العلاقة بين V_n و V_{n+1} ثم استنتج ان المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين اساسها r .

3) بين ان المتتالية (W_n) متقاربة ثم استنتج ان المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية يطلب ايجادها .

4) - أ) احسب المجموع $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ثم استنتج عبارة الجداء $\pi_n = V_1 V_2 \dots \times V_n$ ثم عبارة Q_n حيث $Q_n = U_1 U_2 \dots \times U_n$

ب) ادرس نهايات المتتاليات (S_n) ، (Q_n) ، (π_n) .

✓ الحل

1) الدالة $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$

و بالتالي من اجل كل x من $[1, +\infty[$ لدينا $0 < \frac{x}{(x+1)^2} < \frac{1}{2}$

و منه ينتج $0 < \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}$

نريد إثبات ان من اجل كل $n \geq 1$ يكون $2 \geq U_n > 0$ ، نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع

نسمي P_n الخاصية $\left(2 \geq U_n > 0\right)$

P_1 صحيحة لأن $2 \geq U_1 > 0$

نفرض ان P_n صحيحة اي $2 \geq U_n > 0$ و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $2 \geq U_{n+1} > 0$

بما ان $2 \geq U_n > 0$ و $\frac{1}{2} \geq \frac{n}{(n+1)^2} > 0$ فإن $1 \geq U_n \times \frac{n}{(n+1)^2} > 0$

ومنه نستنتج $Ln\left(U_n \times \frac{n}{(n+1)^2}\right) < 0$ اي $Ln\left(U_n\right) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) < 0$

وبالقسمة على 2 نجد $\frac{1}{2}\left[Ln\left(U_n\right) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right] < 0$ اي $Ln\left(U_{n+1}\right) < 0$.

بما ان $Ln\left(U_{n+1}\right) < 0$ فإن $1 > U_{n+1} > 0$ و بما ان $2 \geq 1$

فإن $2 \geq U_{n+1} > 0$ إذن P_{n+1} صحيحة

وبالتالي P_n صحيحة من اجل كل $n \geq 1$

2) $V_{n+1} = (n+1)\, U_{n+1}$ ومنه $Ln\left(V_{n+1}\right) = Ln\left((n+1)\, U_{n+1}\right)$

$$Ln\left(V_{n+1}\right) = Ln(n+1) + Ln\left(U_{n+1}\right) = Ln(n+1) + \frac{1}{2}\left[Ln\left(U_n\right) + Ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)\right]$$

$$= Ln(n+1) + \frac{1}{2} Ln\left(U_n\right) + \frac{1}{2} Ln(n) - Ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left(U_n\right) + \frac{1}{2} Ln(n) = \frac{1}{2} Ln\left(n \times U_n\right)$$

$$= \frac{1}{2} Ln\left(V_n\right) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

ومنه $V_{n+1} = V_n^{\frac{1}{2}}$

- استنتاج أن المتتالية (W_n) هندسية .

$$W_{n+1} = Ln\left(V_{n+1}\right) = Ln\left(V_n^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} Ln\left(V_n\right) = \frac{1}{2} W_n$$

ومنه المتتالية (W_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$.

3) بما ان $r = \frac{1}{2}$ فإن المتتالية (W_n) متقاربة نحو الصفر

بما ان $W_n = Ln\left(V_n\right)$ و $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

فإن $\lim_{n \to +\infty} V_n = 1$ و $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

لأن $\left(U_n = V_n \times \frac{1}{n}\right)$

4) أ) $S_n = W_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$ ، $W_1 = Ln\left(V_1\right) = Ln\left(U_1\right) = Ln(2)$

$$S_n = Ln(2) \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\, Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

- $S_n = W_1+W_2+ \;....\; +W_n$

$$S_n = Ln(V_1)+ \;....\; + Ln(V_n)$$

$$S_n = Ln(V_1 \times .... \times V_n) = Ln(\pi_n)$$

ومنه $\pi_n = e^{S_n} = e^{-2Ln(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}$

$$\pi_n = (1\times U_1)(2\times U_2)\times ... \times (n\,U_n)$$

$$\pi_n = (1\times 2\times ... \times n)(U_1\times ...\times U_n)$$

$\pi_n = (n!)Q_n$ ومنه $Q_n = \frac{\pi_n}{n!}$

ب) $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2Ln(2)$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = e^{2Ln(2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi_n}{n!} = 0$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$ و $\lim_{n\to+\infty} \pi_n = e^{2Ln(2)}$

تطبيق 40 الدوال اللوغاريتمية و المتتاليات

f دالة معرفة على المجال $I =]e+1\,,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x-1}{Ln(x-1)}+1$

1) أ) عين اتجاه تغير الدالة f

ب) عين نهاية f على أطراف المجال I .

جـ) برهن انه إذا كان $x > e+1$ فإن $f(x) > e+1$

2) نعرف المتتالية (U_n) بـ $U_0 = e^2+1$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=f(U_n)$

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > e+1$

ب) برهن ان المتتالية (U_n) متناقصة

جـ) استنتج ان (U_n) متقاربة نحو ℓ ثم عين ℓ .

الحل

1) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]e+1\,,+\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{Ln(x-1)-1}{[Ln(x-1)]^2}$

بما ان $x > e+1$ فإن $x-1 > e$

ومنه $Ln(x-1) > 1$ إذن $f'(x) > 0$ على المجال $]e+1\,,+\infty[$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]e+1\,,+\infty[$

ب) $\lim_{x\to e+1} f(x) = e+1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

جـ) بما ان الدالة f متزايدة تماما على $]e+1\,,+\infty[$

فإنه إذا كان $x > e+1$ يكون $f(x) > f(e+1)$ اي $f(x) > e+1$

2) أ) نسمي P_n الخاصية $(U_n > e+1)$

P_0 صحيحة لأن $U_0 = e^2+1$ و $e^2+1 > e+1$

نفرض ان P_n صحيحة اي $U_n > e+1$

ونبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $U_{n+1} > e+1$

بما ان $U_n > e+1$ و f متزايدة تماما على $]e+1\,,+\infty[$

فإن $f(U_n) > f(e+1)$ اي $U_{n+1} > e+1$

ومنه P_{n+1} صحيحة

و بالتالي P_n صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n .

ب) بما ان f متزايدة تماما على $]e+1\,,+\infty[$ فإن (U_n) رتيبة،

ولتعيين نوع الرتابة نحسب U_1-U_0.

إذا كان $U_1-U_0>0$ نقول ان (U_n) متزايدة

وإذا كان $U_1-U_0<0$ نقول ان (U_n) متناقصة

$$U_1-U_0 = \frac{U_0-1}{Ln(U_0-1)}+1-U_0 = -\frac{1}{2}e^2 < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة

جـ) بما ان (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو ℓ حيث ℓ حل لـ $x=f(x)$

$x=f(x)$ يكافئ $(x=1)$ او $(x=e+1)$

بما ان $1 \notin]e+1\,,+\infty[$ فإنه مرفوض و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} U_n = e+1$

تطبيق 41 الكيمياء PH

في الكيمياء الرمز PH يعني تكمون الهيدروجين.

PH يسمح لنا بالتعبير عن الطبيعة الحمضية او الأساسية لمحلول مائي .

إذا كانت $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ تمثل تركيز شوارد الهيدروجين بالمول.

نضع $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right]$

1) من اجل محلول حمضي لدينا $1 < PH < 7$ استنتج تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$.

2) من اجل محلول قاعدي (أساسي) لدينا $7 < PH < 14$

استنتج تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ لهذا المحلول القاعدي.

3) ماء معدني غازي يحمل إشارة $PH = 6,5$ ما هو تركيزه بشوارد $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ ؟

4) متوسط تركيز $\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ في بول لأكلات اللحوم هو $\left[H_3\overset{+}{O}\right]=3,2\times10^{-6}$

مول على اللتر. احسب PH هذا المحلول. ماذا تستنتج ؟

5) إذا علمت أن تركيز $H_3\overset{+}{O}$ في الدم هو 4×10^{-8} مول على اللتر،

بين أن الدم له طبيعة قاعدية ضعيفة.

✓ الحل

1) $1 < PH < 7$ هذا يعني $1 < -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 7$ أي $1 < Log\frac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 7$

بما أن الدالة $x \mapsto 10^x$ متزايدة تماما فإنه ينتج $10^1 < \frac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 10^7$

بالقلب نجد $10^{-7} < \left[H_3\overset{+}{O}\right] < 10^{-1}$

2) $7 < PH < 14$ هذا يعني $7 < -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 14$.

$7 < -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] < 14$ منه نستنتج $10^7 < \frac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} < 10^{14}$

بالقلب نجد $10^{-14} < \left[H_3\overset{+}{O}\right] < 10^{-7}$

3) $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right]$ منه $PH = Log\frac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]}$ منه $\frac{1}{\left[H_3\overset{+}{O}\right]} = 10^{PH}$

بالقلب نجد $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 10^{-PH}$ أي $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 10^{-6.5}$

4) $PH = -Log\left[H_3\overset{+}{O}\right] = -Log\left(3,2\times10^{-6}\right) = 5,494$

بما أن $1 < PH < 7$ فإن هذا المحلول حمضي.

5) $\left[H_3\overset{+}{O}\right] = 4\times10^{-8}$ ومنه $PH = -Log\left(4\times10^{-8}\right) = 7,40$

بما أن $7 < PH < 14$ فإن هذا المحلول قاعدته ضعيفة .

تطبيق 42 حل المعادلات والمتراجحات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

أ) $7^{x-2}=5^x$ ، ب) $5^x \ge 4$ ، جـ) $\frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4}$

د) $2^{4x-2}-2^{2x}-3=0$ ، هـ) $4^x+2^{x+1}-3\le 0$ ، و) $5^{x+1}+2\times5^{-x}=7$

✓ الحل

أ) $7^{x-2}=5^x$ تكافئ $(x-2)Ln(7) = xLn(5)$ يكافئ $x=\frac{2Ln(7)}{Ln\left(\frac{7}{5}\right)}$

ب) $5^x \ge 4$ يكافئ $x\,Ln(5) \ge 4$ يكافئ $x \ge \frac{4}{Ln(5)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $5^x \ge 4$ هي $S=\left[\frac{4}{Ln(5)}, +\infty\right[$

جـ) $\frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4}$ يكافئ $4\times3^x < 3^x+1$ يكافئ $x \le -1+\frac{1}{Ln(3)}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left]-\infty, -1+\frac{1}{Ln(3)}\right]$

د) المعادلة (د) تكتب $\left(2^{2x}\right)^2\times2^{-2}-2^{2x}-3=0$ و بوضع $X=2^{2x}$

تصبح $2^{-2}X^2-X-3=0$ وحلا هذه الأخيرة هما 4- و 12

X_2 مرفوض لأنه سالب و X_1 مقبول

$X=X_1$ تكافئ $x=\frac{Ln(12)}{Ln(4)}$ ومنه $S=\left\{\frac{Ln(12)}{Ln(4)}\right\}$

هـ) المتراجحة (هـ) تكتب على شكل $\left(2^x\right)^2+2\times2^x-3\le0$

وبوضع $X=2^x$ تصبح $X^2+2X-3\le0$.

للمعادلة $X^2+2X-3=0$ حلان هما 1 و 3-

و بالتالي $X^2+2X-3=(X+3)(X-1)$ اذن $(2^x)^2+2\times 2^x-3=(2^x+3)(2^x-1)$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $2^x+3 \rangle 0$

و منه إشارة $(2^x)^2+2\times 2^x-3$ هي نفس إشارة (2^x-1).

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
إشارة 2^x-1	- 0 +
إشارة $(4^x+2^{x+1}-3)$	- 0 +

من الجدول المجاور نستنتج أنه إذا كان $x\le 0$ فإن $4^x+2^{x+1}-3\le 0$ و منه مجموعة حلول المتراجحة $4^x+2^{x+1}-3\le 0$ هي: $S=]-\infty,0]$

و) بضرب طرفي المعادلة (و) في العدد 5^x نجد $5^{2x+1}+2=7\times 5^x$ بالتبسيط نجد $5^{2x+1}-7\times 5^x+2=0$ و بوضع $X=5^x$ تصبح $5X^2-7X+2=0$.

حلا المعادلة $5X^2-7X+2=0$ هما 1 و $\frac{2}{5}$.

$X=1$ يكافئ $5^x=1$ تكافئ $x=0$

$X=\frac{2}{5}$ يكافئ $5^x=\frac{2}{5}$ يكافئ $x=\dfrac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلا المعادلة (و) هي $S=\left\{\dfrac{Ln\left(\frac{2}{5}\right)}{Ln(5)}, 0\right\}$.

تطبيق 43 — حل جملة معادلتين

حل في $\mathbb{R}^2$ الجملتين التاليتين:

أ) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2^x\times 3^y=18 \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} 5^x\times 5^y=25 \\ 5^x+5^y=\frac{626}{5} \end{cases}$

الحل

أ) $\begin{cases} x+y=3 \;...\;(1) \\ 2^x\times 3^y=18 \;...\;(2) \end{cases}$

من (1) نجد $y=3-x$ نعوض y في (2) نجد $2^x\times 3^{3-x}=18$

ومنه نستنتج $Ln(2^x)+Ln(3^{3-x})=Ln(18)$ اي $x\,Ln(2)+(3-x)Ln(3)=Ln(18)$

بالتبسيط نجد $x\,Ln\left(\frac{2}{3}\right)=Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه نجد $x=1$.

نعوض قيمة x في عبارة y نجد $y=2$

إذن مجموعة حلول الجملة (أ) هي $S=\{(1,2)\}$.

ب) بوضع $X=5^x$ و $Y=5^y$

فالجملة (ب) تصبح كما يلي $(I)\;....\begin{cases} XY=25 \;...\;(1) \\ X+Y=\frac{626}{5} \;...\;(2) \end{cases}$.

من المساواة $XY=25$ نجد $Y=\frac{25}{X}$

وبتعويض عبارة Y في المعادلة (2) نجد $X+\frac{25}{X}=\frac{626}{5}$

بالتبسيط نجد $5X^2-626X-125=0$

وبعد حل هذه الأخيرة نجد $X_1=\frac{625+\sqrt{395436}}{10}$ ، $X_2=\frac{625-\sqrt{395436}}{10}$

X_2 سالب فهو مرفوض و X_1 موجب فهو مقبول.

$X=X_1$ يكافئ $5^x=X_1$ يكافئ $x=\dfrac{Ln(X_1)}{Ln(5)}$

بتعويض قيمة X في عبارة Y نجد $Y=\frac{25}{X_1}$

$Y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $5^y=\frac{25}{X_1}$ يكافئ $y=\dfrac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left\{\left(\dfrac{Ln(X_1)}{Ln(5)}, \dfrac{Ln\left(\frac{25}{X_1}\right)}{Ln(5)}\right)\right\}$.

تطبيق 44 — رسم التمثيل البياني لدالة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)2^x$

ادرس تغيرات f ثم ارسم (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل

$2^x=e^{x\,Ln(2)}$ منه $f(x)=(2-x)\,e^{x\,Ln(2)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2\,e^{x\,Ln 2}-\frac{1}{Ln 2}\;(Ln 2)\,x\,e^{x\,Ln 2}\right]=0$.

لأن $\lim_{x\to-\infty}(Ln2)\,x\,e^{x\,Ln2} = \lim_{X\to-\infty} X e^{X} = 0$ مع $X = x\,Ln\,2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{x\,Ln2} = +\infty$.

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = \left(-x\,Ln(2) - 1 + 2\,Ln\,2\right)e^{x\,Ln(2)}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2} = \alpha$

- إذا كان $x > \frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ فإن $f'(x) < 0$
- إذا كان $x < \frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$ فإن $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغيرات f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

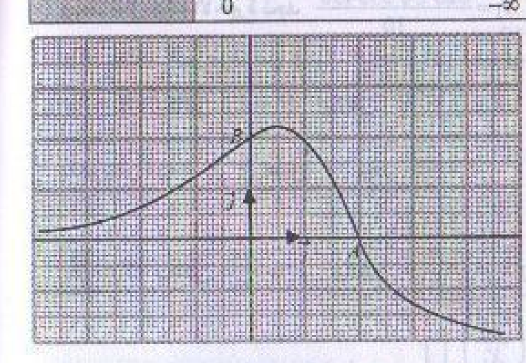
$\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2} \approx 0,56$

و $f\left(\frac{-1+2\,Ln\,2}{Ln\,2}\right) \approx 2,1$

المنحني (C_f) يقطع (xx') في النقطة $A(2,0)$

المنحني (C_f) يقطع (yy') في النقطة $B(0,2)$

يمكن التأكد من أن المنحني (C_f) له نقطة انعطاف فاصلتها أكبر 2



تطبيق 45 إيجاد عدد حلول المعادلة $x^3 = (1,5)^x$

1) بين أنه من أجل كل $x > 0$ المساواة $x^3 = (1,5)^x$ تكتب على الشكل:
$\frac{Ln(x)}{x} = \frac{Ln(1,5)}{3}$ ... (1)

2) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{Ln\,x}{x}$

بين أن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلين موجبين فقط.

الحل

1) من المساواة $x^3 = (1,5)^x$ ينتج $Ln(x^3) = Ln(1,5)^x$

وباستعمال خواص الدالة Ln نجد $3\,Ln\,x = x\,Ln(1,5)$

ومنه ينتج $\frac{Ln(x)}{x} = \frac{Ln(1,5)}{3}$.

2) $D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \overset{+}{0}$ و

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - Ln\,x}{x^2} = \frac{1-Ln\,x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\overset{+}{0}$

الدالة f متناقصة تماما على $[e,+\infty[$ و متزايدة تماما على $]0,e]$

ب) بما أن $f' > 0$ على $]0,e[$ و $\frac{Ln(1,5)}{3} \in]-\infty,\frac{1}{e}[$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0,e[$.

بما أن $f' < 0$ و $\frac{Ln(1,5)}{3} \in]0,\frac{1}{e}[$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{Ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا β ينتمي إلى $]e,+\infty[$.

تطبيق 46 حل معادلات ومتراجحات

حل المعادلات و المتراجحات و الجمل التالية:

1) $x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0$ ، 2) $x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 > 0$

3) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$

الحل

1) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2 - 3X + 2 = 0$ و حلاها هما 1 ، 2

$X = 1$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}} = 1$ يكافئ $x = 1^3 = 1$

$X = 2$ يكافئ $x^{\frac{1}{3}} = 2$ يكافئ $x = 8$

منه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{1,8\}$

2) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ المتراجحة (2) تكتب على الشكل $(X-1)(X-2) \rangle 0$
ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $]-\infty , 1[\cup]2 , +\infty[$
وبما ان الدالة $x \mapsto x^3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $x \in]-\infty , 1[\cup]8 , +\infty[$
و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S =]-\infty , 1[\cup]8 , +\infty[$

3) الجملة لها معنى إذا و فقط إذا كان $x \rangle 0$ و $y \rangle 0$.
الجملة تكتب على شكل $\begin{cases} e^{x Ln(y)} = e^{y Ln(x)} \\ x = y^2 \end{cases}$ و هذه الأخيرة تكتب $\begin{cases} e^{y^2 Ln(y)} = e^{y Ln(y^2)} \\ x = y^2 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} e^{y^2 Ln(y) - 2y Ln(y)} = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$ وبالتبسيط نجد $(y^2 - 2y) Ln(y) = 0$ و $x = y^2$.

حلول المعادلة $(y^2 - 2y) Ln(y) = 0$ هي $(y = 2)$ او $y = 1$.
إذا كان $y = 2$ فإن $x = 4$ و إذا كان $y = 1$ فإن $x = 1$.
ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{(4,2) , (1,1)\}$.

تطبيق 47 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

f دالة معرفة بـ $f(x) = Ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) برر صحة كل من المعلومات التالية
أ) f معرفة على $\mathbb{R}$.
ب) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = 2x + Ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.
جـ) للمنحني (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x$ كمستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$.
د) المنحني (γ) يقبل مماسا وحيدا موازيا لمحور التراتيب.
2) ارسم (d) و (γ) و المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

✓ الحل

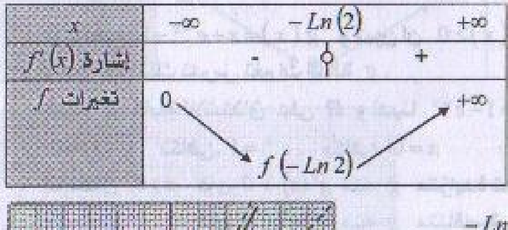
1) أ) f معرفة إذا و فقط إذا كان $e^{2x} - e^x + 1 \rangle 0$ ... (1)
بوضع $X = e^x$ المتراجحة (1) تكتب $X^2 - X + 1 \rangle 0$.
مميز $X^2 - X + 1$ هو $\Delta = -3$
$\Delta \langle 0$ منه إشارة $(X^2 - X + 1)$ هي من إشارة معامل X^2 اي موجبة تماما.
بالتالي $e^{2x} - e^x + 1 \rangle 0$ إذن $D_f = \mathbb{R}$.

ب) من اجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x) = Ln\ e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = Ln\ e^{2x} + Ln\ (1 - e^{-x} + e^{-2x})$$
$$= 2x + Ln\ (1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

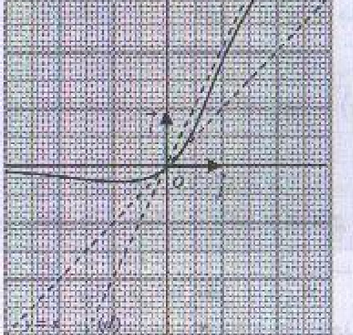
جـ) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} Ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$
إذن $(d) : y = 2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$.

د) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - e^x + 1)}$

$f'(x) = 0$ تكافئ
$e^x(2e^x - 1) = 0$ يكافئ
$x = -Ln(2)$
إشارة $f'(x)$ من إشارة
$(2e^{2x} - e^x)$.
بما ان $f'(x)$ ينعدم عند
$-Ln(2)$ مغيرا إشارته في جوار $-Ln(2)$
فإن المنحني (γ) له مماس يوازي محور التراتيب
عند النقطة ذات الفاصلة $-Ln(2)$



x	$-\infty$		$-Ln(2)$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	
تغيرات f	0 ↘		$f(-Ln 2)$		↗ $+\infty$



2) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0
معادلته $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
بالتعويض نجد $y = x$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(-Ln(2)) = Ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,28$

تطبيق 48 الدوال اللوغاريتمية و الأسية

f دالة معرفة بـ $f(x) = Ln(x + e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) أ) بين انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x + e^{-x} \geq 1$.
ب) استنتج ان f معرفة على $\mathbb{R}$.
2) أ) تحقق من صحة المعلومات التالية :
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = -x + Ln(1 + xe^x)$
- من أجل كل $x \rangle 0$ لدينا $f(x) - Ln\, x = Ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب) عين نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

جـ) استنتج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$.

3) ماهي نهاية $[f(x)-Ln\,x]$ عند $(+\infty)$ ماذا تستنتج ؟

4) ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.

5) ارسم (d) و (γ) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto Ln\,x$

✓ الحل

1) أ) نضع $g(x)=x+e^{-x}-1$ و نبين أن $g(x)\geq 0$

و من أجل ذلك ندرس تغيرات الدالة g.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=1-e^{-x}$

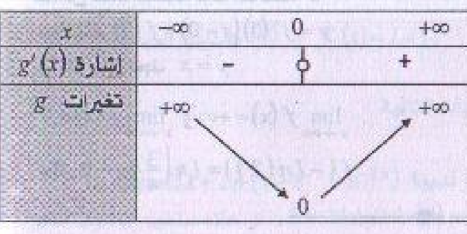
$g'(x)=0$ تكافئ $e^{-x}=1$ يكافئ $x=0$

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$ و منه g متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)<0$ و منه g متناقصة تماما على $]-\infty\,,0[$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{xe^{x}}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات g	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

من جدول تغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g(x)\geq 0$ أي $x+e^{-x}\geq 1$.

ب) بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x+e^{-x}\geq 1$ فإن $x+e^{-x}\geq 0$ و هذا يعني أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

لدينا $f(x)=Ln\,e^{-x}(1+xe^{x})= Ln(e^{-x})+Ln(1+xe^{x}) = -x+Ln(1+xe^{x})$

من أجل كل $x>0$ لدينا $f(x)=Ln\,x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=Ln\,x+Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

منه $f(x)-Ln\,x=Ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+Ln(1+xe^{x})\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} Ln(x+e^{-x})=+\infty$

جـ) $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty} Ln(1+xe^{x})=0$

و منه $y=-x$; (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ لـ (γ)

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-Ln(x)=\lim_{x\to+\infty} Ln\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right)=0$

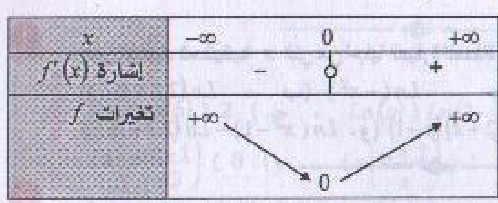
نستنتج أنه بجوار $(+\infty)$ للمنحني (Γ) الممثل للدالة Ln مقارب للمنحني (γ).

4) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=0$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

إذا كان $x>0$ فإن $f'(x)>0$ و منه f متزايدة تماما على $]0\,,+\infty[$.

إذا كان $x<0$ فإن $f'(x)<0$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty\,,0]$.

المنحني (γ) يقع تحت (d) من أجل كل $x<0$.

تمارين و مسائل

1. عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Ln(2x+1)$ ، ب) $Ln(-x^2)$ ، جـ) $Ln(x^2+4x-5)$.

د) $Ln(x^2-1)-Ln(2x+1)$ ، و) $Ln(2+x)(x-1)$ ، ي) $Ln(x^2+1)+Ln(x^2-1)$

2. في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة ذات معنى:

أ) $Ln\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)$ ، ب) $Ln\left(\left|\frac{2x+3}{1-x}\right|\right)$ ، جـ) $Ln(|x^2-1|-1)$

د) $\frac{x+1}{Ln(x)-2}$ ، و) $\frac{x}{[Ln\,x]^2+3\,Ln\,x-2}$ ، ي) $Ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ ، هـ) $\sqrt{Ln\,x}$

3. f دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=a\,x^2+b\,x+Ln(x+2)$ مع a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

$A(-1,2)$ نقطة من (C_f) بحيث المماس عندها يوازي مستقيم ميله 2

عين العددين الحقيقيين a و b .

4. (γ) المنحني البياني للدالة Ln في معلم متعامد و متجانس. M نقطة من (γ) فاصلتها m .

1) أوجد بدلالة m معادلة المماس T للمنحني (γ) عند النقطة M .

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $m>0$ ، المماس T يقطع محور التراتيب في نقطة K إحداثييها $(0\ ,\ Ln(m)-1)$.

ب) استنتج أنه إذا كانت H المسقط العمودي لـ M على محور التراتيب فإن $\vec{KH}=\vec{j}$

جـ) أعط عندئذ طريقة بسيطة لإنشاء المماس للمنحني (γ) عند النقطة M .

5. عين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة:

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln(x)}$ ، ب) $f(x)=x+Ln(x+1)$ ، جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right)$

د) $f(x)=Ln(x^2+3x)$ ، و) $f(x)=Ln(|x-1|)$ ، ن) $f(x)=Ln\left(\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\right)$

6. حل المعادلات التالية:

أ) $Ln(-x+3)=2\,Ln\,2$ ، ب) $2\,Ln\,x=Ln(-3x+4)$

جـ) $Ln(x^2-4x)=Ln(x+4)$ ، د) $Ln(x^2-1)=0$ ، هـ) $Ln(x^2-1)=-1$

و) $Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2$ ، ن) $Ln(x+2)+Ln(x-2)=Ln(21)$

7. حل المتراجحات التالية:

أ) $Ln(x)-3\geq 0$ ، ب) $Ln(x)>Ln(2-x)$ ، جـ) $Ln(2x-6)>2$

د) $Ln(x+3)+2<0$ ، هـ) $Ln\left(\frac{x+2}{x}\right)>1$ ، و) $Ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)<0$

ن) $Ln(x-2)\leq Ln(3x-1)$ ، ي) $Ln(5x)\leq Ln(x^2-x)$

8. في كل حالة من الحالات التالية عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f معرفة:

أ) $f(x)=\sqrt{Ln(x)-2}$ ، ب) $f(x)=\sqrt{Ln(2x)-5}$

جـ) $f(x)=\frac{1}{2\,Ln(x-1)+3}$ ، د) $f(x)=\frac{x}{Ln(x^2-1)-3}$

هـ) $f(x)=\frac{Ln(2x-1)}{2\,Ln\,x-6}$ ، و) $f(x)=Ln(3-Ln\,x)$

ن) $f(x)=Ln(Ln(x))$

9. 1) حل الجملة $\begin{cases}3x+5y=21\\4x+7y=29\end{cases}$ ثم استنتج حل الجملة:

$$\begin{cases}3\,Ln(x)+4\,Ln(y)=21\\4\,Ln(x)+7\,Ln(y)=29\end{cases}$$

10. حل الجملتين التاليتين:

1) $\begin{cases}x-y=8\\Ln(x)-Ln(y)=2\,Ln(3)\end{cases}$ ، 2) $\begin{cases}x+y=12\\Ln(x)+Ln(y)=3\,Ln(3)\end{cases}$

11. ليكن $P(x)$ كثير حدود معرف بـ $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) بين أن $P(1)=0$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء عوامل ثم حل المعادلة $P(x)=0$.

2) حل المعادلة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6=0$

3) حل المتراجحة $(Ln\,x)^3-2(Ln\,x)^2-5\,Ln\,x+6\geq 0$

12 - (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ $U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1) احسب نهاية (U_n)

2) نضع $S_n = U_1+U_2+....+U_n$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

13 - في كل حالة من الحالات التالية ادرس نهاية f عند المكان المعطى :

أ) $f(x)=\frac{Ln x}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x)=\frac{Ln x}{x-1}$ عند 0

جـ) $f(x)=x+1-Ln(x)$ عند $(+\infty)$ ، د) $f(x)=\frac{1}{x^2}-Ln x$ عند $+\infty$ و 0

هـ) $f(x)=x+x\,Ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ ، و) $f(x)=\frac{x\,Ln x}{x+2}$ عند 0

ي) $f(x)=1+x^2-x^2\,Ln x$ عند $+\infty$ ، ن) $f(x)=\frac{Ln(x)-1}{x-e}$ عند e

14 - ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{x}{Ln x}$ ، $I=]1,+\infty[$

ب) $f(x)=x(2-Ln x)$ ، $I=]0,+\infty[$

جـ) $f(x)=Ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I=]-\infty,-3[$

د) $f(x)=\frac{Ln(x)-3}{x}$ ، $I=]e^3,+\infty[$

هـ) $f(x)=\frac{x+2}{Ln x}$ ، $I=]1,+\infty[$

و) $f(x)=x+2+Ln x-Ln(x^2+1)$ ، $I=]0,+\infty[$

ن) $f(x)=x^2+x-x\,Ln x$ ، $I=]0,+\infty[$

ي) $f(x)=\sqrt{x}\,Ln(x)+1$ ، $I=]0,+\infty[$

ع) $f(x)=x^2-Ln(x^2+1)$ ، $I=\mathbb{R}$

15 - حل المعادلات التالية :

أ) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=0$

ب) $Ln|x+3|+Ln|x-1|=Ln 8$

جـ) $Ln|2x+7|+Ln|x+1|=2\,Ln|x+2|$

د) $Ln(x-2)-Ln(x)=Ln(\alpha)$

16 - حل المتراجحات و الجمل التالية :

1) $3(Ln x)^2-4\,Ln x-3\geq 0$ ، 2) $2(Ln|x|)^2+3\,Ln(x^2)-5<0$

3) $\begin{cases} Ln(x)Ln(y)=6 \\ Ln(xy)=5 \end{cases}$ ، 4) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ Ln(xy)=\frac{1}{2}Ln(3) \end{cases}$

17 - الدوال التالية معرفة على $I=]0,+\infty[$ ادرس تغيرات كل منها ثم ارسم منحناها البياني

أ) $f(x)=\frac{Ln x}{x}$ ، ب) $f(x)=(Ln x)^2+1$ ، جـ) $f(x)=\frac{2-Ln x}{x}$

د) $f(x)=x+1-Ln x$ ، هـ) $f(x)=x^2-x+1+3\,Ln x$

18 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x)=\frac{1}{Ln x}$

ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني.

19 - f و g دالتان معرفتان على المجال $I=[0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=Ln(x+2)$ و $g(x)=\frac{x+1}{x+2}$. (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين في معلم متعامد و متجانس.

1) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ يكون $g(x)\leq f(x)$

2) برهن ان (C_f) و (C_g) لهما مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$ ثم ارسم (C_f) و (C_g) .

20 - f دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$.

1) برهن أن الدالة f متزايدة تماما على I

2) أ) برهن ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $(+\infty)$

ب) عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d).

21 - نعتبر الدالة h المعرفة بالعبارة $h(x)=x^2+1-Ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة h ثم بين ان $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ و استنتج إشارة $h(x)$

2) لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{Ln x}{x}$

أ) احسب $f'(x)$ ثم بين ان $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ على $]0,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و عند الصفر ثم شكل جدول تغيرات f.

3) أ) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f).

ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (d) و (C_f).

22 - f دالة معرفة على $I=]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+2+Ln(x^2-4)$

1) برهن أن f متزايدة تماما على I

2) أ) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α في المجال I

ب) عين حصرا لـ α بتقريب $0,1$.

23 - f دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ).

2) لتكن M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 نقط من (γ).

M_1 نقطة تقاطع (γ) مع (xx').

M_2 نقطة من (γ) بحيث المماس عندها يمر من المبدأ.

M_3 هي النقطة التي عندها المماس يوازي (xx').

M_4 هي النقطة التي عندها المشتق الثاني لـ f ينعدم.

أ) احسب فواصل النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4.

ب) بين أن هذه الفواصل تمثل متتالية هندسية.

24 - f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{Ln\,x}{x^2}$. و (γ) تمثيلها البياني

1) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

2) أ) A نقطة من (γ) ذات الفاصلة 1 ، أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند A

ب) ارسم (T) ثم (γ).

3) M نقطة من (γ) فاصلتها u. بين أن المماس (Tu) لـ (γ) عند النقطة M يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذا و فقط إذا كان $u^3-1+2\,Ln(u)=0$ .... (I)

4) بعد حل المعادلة (I) بين أن النقطة A هي النقطة الوحيدة من (γ) المماس فيها يكون موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

25 - f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $x>0$ ؛

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\left(Ln(x)-\frac{3}{2}\right) \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ) ما هي نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ لما x يؤول 0

ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

ج) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

2) (γ) المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس وحدة الطول 2cm.

أ) أوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب) نريد في هذا السؤال دراسة الوضعية النسبية لـ (γ) و (T).

لتكن h دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$.

ادرس إشارة $h''(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$ ثم $h(x)$ على $]0,+\infty[$.

3) ارسم (T) و المماسات عند نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل و كذا (γ).

26 - f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^2+x-\frac{1+Ln\,x}{x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد.

1) g دالة معرفة على $I=]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=2x^3+x^2+Ln\,x$ ..

ادرس تغيرات g على I ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أوجد العدد الطبيعي p بحيث $(P+1)\,10^{-2}\geq\alpha\geq P\,10^{-2}$

2) عين نهاية f عند أطراف I.

أ) بين أنه من أجل كل x من I يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.

ب) h دالة معرفة على I بالعبارة $h(x)=x^2+x$ و (p) منحناها البياني.

ما هي نهاية $f(x)-h(x)$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (γ) و (p).

ارسم (p) و (γ).

27 - I) g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-Ln\,x$.

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0,+\infty[$ ثم أعط حصرا لـ α بتقريب 0,01.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{2\,Ln\,x}{x^2+x}$ و ليكن (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس نهاية f عند الصفر و $(+\infty)$.

2) بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ يكون $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\,g(x)$

ثم استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f.

4) باستعمال السؤال 2) من 1) بين ان $Ln(\alpha)=\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ و $f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم ارسم (γ)

28 - k عدد حقيقي، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0,1]$ بـ $f_k(x)=x(Ln\,x)^2+kx$

و (γ_k) منحناها البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

I) نضع $k=0$.

1) عين اتجاه تغير الدالة f_0.

2) أ) احسب $\lim_{u\to+\infty}\frac{Ln\,u}{\sqrt{u}}$ ثم $\lim_{u\to+\infty}\frac{(Ln\,u)^2}{u}$

ب) استنتج ان $\lim_{x\to 0} x(Ln\,x)^2=0$ ثم احسب $\lim_{x\to 0} f_0(x)$.

ج) بوضع $f_0(0)=0$ هل الدالة f_0 المعرفة بهذا الشكل قابلة للاشتقاق عند الصفر؟

د) عين نهاية النسبة $\frac{f_0(x)}{x}$ لما x يؤول إلى الصفر ثم استنتج معادلة المماس عند النقطة $O(0,0)$ للمنحنى (γ_0) ثم ارسم (γ_0).

II) 1) أ) احسب $f'_k(x)$ من اجل $x\in]0,1]$.

ب) A_k نقطة من (γ_k) فاصلتها 1 بين ان المماس (T_k) لـ (γ_k) عند A_k هو (OA_k)

2) أ) ادرس نهاية f_k عند الصفر و هذا بأخذ $f_k(0)=0$.

ب) أوجد معادلة المماس لـ (γ_k) عند النقطة O.

29 - **I)** f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\,Ln\,x}{x+1}$

1) لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $g(x)=Ln(x)+x+1$.

ادرس تغيرات g ثم بين ان المعادلة $g(x)=0$ لها حلا وحيدا β بحيث $0,28\ge\beta\ge 0,27$.

2) أ) من أجل كل $x\rangle 0$ أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ مستنتجا تغيرات f.

ب) عين نهاية الدالة f عند أطراف $]0,+\infty[$.

II) نعتبر المعادلة (I) ... $f(x)=n$ و n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين ان المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا α_n.

2) أ) بين ان $f(e^n)\le n$ ثم استنتج ان $\alpha_n\ge e^n$

ب) بين ان العلاقة $f(\alpha_n)=n$ تكتب على الشكل $Ln(\frac{\alpha_n}{e^n})=\frac{n}{\alpha_n}$ ..... (2)

ثم استنتج باستعمال السؤال (I) نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$ لما n يؤول إلى $(+\infty)$

3) نكتب $\alpha_n=e^n(1+\varepsilon_n)$ مع $\varepsilon_n\ge 0$.

أ) باستعمال المساواة (2) اكتب $(1+\varepsilon_n)Ln(1+\varepsilon_n)$ بدلالة n.

ب) بين أنه من أجل $t\ge 0$ يكون $0\le(1+t)Ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$

ج) استنتج من (أ) و (ب) أنه من أجل كل $n\ge 1$ يكون

$\varepsilon_n\le n e^{-n}\le\varepsilon_n+\frac{(\varepsilon_n)^2}{2}$ ... (3).

د) من (2) و (3) عين نهاية $e^n+n-\alpha_n$ لما n يؤول إلى $(+\infty)$.

30 - (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0=0$ و من أجل $n\ge 0$ يكون $U_{n+1}=\frac{1}{2-U_n}$.

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 و عبر عن هذه الحدود بواسطة كسر غير قابل للاختزال.

2) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية بالنسبة إلى الحدود الأربعة الأولى لـ (V_n) المعرفة بـ $V_n=\frac{n}{n+1}$.

3) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل $n\ge 0$ يكون $U_n=V_n$.

4) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n=Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

أ) بين أن $W_1+W_2+W_3=-Ln(4)$.

ب) S_n المجموع المعرف بـ $S_n=W_1+W_2+...+W_n$.

أكتب S_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

31 - نريد دراسة تقارب المتتالية $S_n=1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n-1}-Ln\,n$

1) ادرس تغيرات الدالتين f و g المعرفتين على $[1,+\infty[$ بـ:

$f(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x}$ و $g(x)=Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

ثم استنتج ان $\frac{1}{x+1}\le Ln(x+1)-Ln(x)\le\frac{1}{x}$

2) نضع $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

أ) تحقق أنه من أجل $n\ge 1$ يكون $U_{n+1}-1\le Ln(n+1)\le U_n$

ب) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty$.

3) أ) لتكن الدالة K المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ $K(x)=\frac{1}{x}-Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

فسر هندسيا العدد S_n حيث $S_n=U_{n-1}-Ln\,n$.

ب) من السؤال (1) استنتج أنه من أجل كل $n\ge 1$ يكون $0\le K(n)\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

ج) تحقق أنه من أجل كل $n\ge 2$ يكون $S_n=K(1)+K(2)+....+K(n-1)$.

ثم استنتج أن المتتالية (S_n) متزايدة ومن أجل كل $n\geq 2$ يكون $1-\frac{1}{n} < S_n < K(1)$.

د) استنتج من ج) أن (S_n) متقاربة نحو ℓ يطلب تعيينه.

32 - بعد قياس طول أطفال أعمارهم تتراوح ما بين 3 أشهر و 6 سنوات نمذجنا العلاقة بين السن x بالسنوات و الطول $K(x)$ (cm) بالدالة K التالية ،

$$K(x)=71,23+6,13x+8,7\,Log\,x$$

أ) ادرس تغيرات الدالة K على المجال $[0,25 ; 6]$.

ب) ما هي الزيادة في الطول ما بين سنة و سنتين ؟

ج) ارسم المنحنى البياني للدالة K في المجال $[0,25 ; 6]$.

33 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $\begin{cases} f(x)=(|x|)^x , & x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) بين أن هذه الدالة مستمرة على IR و قابلة للاشتقاق على $IR-\{0\}$.

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

34 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR_+^* بـ $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) عين معادلة المماس (T) لـ (γ) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ارسم (γ) و (T)

35 - n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدوال المعرفة على IR بـ $f_n(x)=x^n e^{-x}$

و (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

I) 1) ادرس تغيرات الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 مع إعطاء العدد المشتق عند الصفر.

2) بين أن جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعينها.

3) ادرس تغيرات الدوال f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.

4) قارن بين الوضع النسبي لـ (γ_n) و (γ_{n+1}) على $[0,+\infty[$ و (γ_n) و (γ_{n+2}) على $]-\infty,0]$ و مثل عندئذ (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3) في نفس المعلم.

II) 1) من أجل كل $x>0$ نضع $u(x)=x\,Ln(x)-x$ ادرس تغيرات u .

2) g دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $\begin{cases} g(x)=e^{u(x)} , & x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

أ) تحقق أنه من أجل كل $x>0$ يكون $\frac{g(x)-1}{x}=\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}\times(Ln(x)-1)$.

ب) بين أن الدالة g مستمرة عند الصفر و لكن غير قابل للاشتقاق عند 0.

ج) ادرس تغيرات g .

د) احسب $g(e)$ ثم حل المتراجحة $g(x)\geq 1$ في المجال $]0,+\infty[$.

3) من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ نسمي M_n النقطة ذات إحداثيتي $(n , f_n(n))$.

أ) تحقق أن النقطة M_n نقطة من المنحني البياني للدالة g ثم ارسم هذا المنحني.

4) عين حسب قيم n عدد حلول المعادلة $f_n(x)=1$ على IR .

36 - n عدد طبيعي و f_n دالة معرفة على $[0,1]$ بـ $f_n(x)=x^{n+\frac{1}{2}}\times(1-x)^{\frac{1}{2}}$ ، (γ_n) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين أن (γ_0) نصف دائرة نصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ و مركزها ω يطلب تعيينه.

2) في هذا السؤال نفرض أن $n\geq 1$

أ) من أجل كل x من $]0,1[$ احسب $f'_n(x)$ مبينا أن $f'_n(x)$ و $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x\right]$ لهما نفس الإشارة.

ب) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند الصفر و الواحد. شكل جدول تغيرات f_n .

3) أ) ادرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ لما $0\leq x\leq 1$ و $n\geq 1$

ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيات (γ_n) و (γ_{n+1}) .

ج) ارسم في المعلم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيات (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_0)